O174.1
H66

443219

高等学校教材

实变函数

胡适耕 编著

O174.1
H66

00443219

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

（京）112号

图书在版编目(CIP)数据

实变函数／胡适耕 编著．—北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，1999.7

ISBN 7-04-007314-5

Ⅰ．实… Ⅱ．胡… Ⅲ．实变函数-高等学校-教材 Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17644 号

DW41/27

书　　名　实变函数
作　　者　胡适耕　编著

出版发行　高等教育出版社　施普林格出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街 55 号　　邮政编码　100009
电　　话　010－64054588　　传　　真　010－64014048
网　　址　http://www.hep.edu.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京民族印刷厂

开　　本　880×1270　1/32　　版　　次　1999 年 7 月第 1 版
印　　张　7　　印　　次　1999 年 7 月第 1 次印刷
字　　数　192 000　　定　　价　15.00 元

©China Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Heidelberg 1999

版权所有　侵权必究

前　言

由 Newton，Leibniz 等人开创、后经 Cauchy，Riemann 等人改进的经典微积分，在 19 世纪后期已经成熟，并成为普遍应用的数学工具．然而，就在人们欢庆之际，出现了不祥的信号：经典微积分的一些重大缺陷开始为人们所注意．为革除这些缺陷所作的最初尝试，给创立新的微积分理论揭开了序幕．

人们注意的重点是积分学．经典积分即 Riemann 积分在许多方面不能令人满意．首先，Riemann 积分基本上只适用于连续函数（参看本书 3.4.1），因而其应用大受局限．其次，Riemann 积分与极限互换及两次积分互换均要求很强的条件，这使人们深感不便．还有其他一些结果（如 Newton-Leibniz 公式）所需条件过强．在 Riemann 积分的框架内，改进上述结果的努力要么收效甚微，要么导致更复杂的理论．于是出路在于创立新的积分．

新的积分也就应运而生，它就是出现于本世纪初的 Lebesgue 积分．Lebesgue 首先开创了测度论，然后以测度论为基础，引入了一种全新的积分．经过短暂的沉寂之后，数学家们不无惊喜地接受了 Lebesgue 积分，且最终确信它已消除 Riemann 积分的主要缺陷．新的积分很快在数学的多个领域显示出强大的威力，它的应用到处导致深刻的结果．而且，在以测度论为基础的新方法的推动下，经典微分学的面貌也为之改观．这样，以 Lebesgue 积分为中心的新的微积分理论终于形成．由于历史的原因，这一理论被称作“实变函数论”或“实分析”．实际上，它并非仅限于考虑“实变量函数”．

今天．实变函数论已成为现代分析不可缺少的理论基础．泛函分析的诞生，在一定程度上正是受到实变函数论的推动．实变函数论的

概念、结论与方法，已广泛应用于微分方程与积分方程论、Fourier 分析、逼近论等学科.现代概率论已经完全建立在测度论与 Lebesgue 积分论的基础上.在这个意义上甚至可以说，概率论是“概率测度空间中的实函数论”.实变函数论对于现代数学的重要性，于此可见一斑.所有数学类专业及某些理工科专业将“实变函数”作为一门重要基础课，是理所当然的.

然而不幸的是，这门课程似乎名声欠佳.不少学过实变函数的学生除了留下“抽象、晦涩”的印象之外，收获不多.一种为分析数学带来如此巨大简化的理论，竟被当作一种复杂得令人难以接受的东西！这值得数学家们深思.

应当承认，实变函数论的许多概念有一定的抽象性；许多重要结论异常深刻，而为达到这些结论所需的理论推演亦不简单.问题在于，实变函数论的基本内容应当在何种形式下提供给初学者.一方面，无论是测度与积分，都免不了某些复杂的构造过程.这对于需要训练有素的分析数学研究者固然是重要的，但对于初学者未必是最重要的，对于相当一部分人则可能是完全不必要的.实变函数论本来具有的极富活力的新思想，常常被繁琐冗长的构造过程所窒息，致使初学者望而生畏.这大概是这门课程不易成功的主要原因.另一方面，有关测度与积分的基本概念完全植根于直观经验的现实土壤中，其基本特征实际上极其简单，几乎使人无法置疑；而对有关基本结果的描述也不困难，至于具体运用则更加灵活方便.应该提供给初学者的，正是这一方面，它能给学生以主要思路及实际运用方法.

有鉴于此，本书尽了最大努力来突出那些体现实变函数论基本特征的思想，简化或回避一些复杂的构造，尽可能降低难度，提高可读性.所有基本结论的证明，都作了尽可能的简化.经简化后仍很繁冗的证明，则移入各章最后一节，使对之不感兴趣的读者便于跳过它们.这样做完全不影响对实变函数核心内容的理解与掌握.像 Lebesgue 测度、乘积测度等的具体构造，如同实数理论一样，无疑是

优美的数学创造.但今天的大多数学生没有足够的时间来欣赏这些数学遗产,他们还有更多的东西需要学习.将这些已经定型而又过于繁琐的材料放在一旁,看来是理所当然的.经过这样一些处理之后,希望本书的面貌不致过于令人憎恶.

一个普遍的误解是,实变函数论主要研究那些"病态的"、似乎远离常规思考的函数,因而缺乏实用价值.恰恰相反,实变函数的结论与方法广泛应用于那些以"好函数"为研究对象的领域.用作证明的材料,非本课程所能尽述.但本书尽力举了微积分学中的一些例子,用以强调新方法如何有效地解决老问题.这将有助于正确认识实变函数论的价值.

为便于读者自学,本书尽可能详细地给出了必要的推导;对较难的证明则作了些启发性的导引.不过,作者并不认为应将所有细节包罗无遗.凡需要读者自己思考的地方,本书有意作了省略.当读者见了"请自证"或"何故?"之类的字样时,倘能认真思考,而不是浑然而过,必能收到非同寻常的效果.

本书准备了较多的习题.其中习题A是基本的,凡希望较好理解本书核心内容的读者务必完成其中的大部分.习题B是留给力有余裕的读者的;利用本书后面的提示,解决这些问题并无难以想象的困难,而一旦解题成功你将获益匪浅且兴趣倍增.

使用本书作为教材时,可依几种方式组合书中的材料.若选用§§1.1~1.5, §§2.1~2.4, §§3.1~3.5, §§4.1~4.3, §§5.1~5.3,§5.5,则需50学时左右;若加上§2.5,§3.6,§5.6,§5.7(目录中这些节打了*号),则需60学时左右;讲完全部内容(即再加上目录中打 △ 号的节)至多70学时.对于内容的取舍,使用本书的教师是最权威的;他们富有创意的运用,将是对作者个人经验的极有益的补充与修正,这正是作者所期待的.

借本书出版之机,向关心、支持我编写工作的华中理工大学教务处、数学系的同事们表示衷心的感谢,他们对我的工作给予了热情鼓

励和帮助.北京大学数学系刘和平教授仔细地审阅了全稿,提出了不少中肯的意见,使本书增色不少,在此向他表示万分的谢意.

读者如对本书有什么意见和看法,欢迎来函交流.我的通信地址为:武汉市华中理工大学数学系,邮编:430074.

胡适耕

1999年3月于武汉

记号与约定

A^c:集 A 的补.

$\bar{A}$:集 A 的闭包.

A':集 A 的导集.

$|A|$:集 A 的基数.

AC:绝对连续函数类;AC$[a,b]$:$[a,b]$上的绝对连续函数类.

$B_r(a)$:以 a 为心以 r 为半径的球.

BV:有界变差函数类;BV$[a,b]$:$[a,b]$上的有界变差函数类.

$C(X)$:集 X 上的连续函数之全体;$C[a,b]=C([a,b])$.

$\mathrm{c}=|\mathbf{R}|$:连续统基数.

$d(x,A)$:点 x 到集 A 的距离.

diam$A$:集 A 的直径.

f^+:f 的正部;f^-:f 的负部.

$\mathscr{L}$:Lebesgue 可测集类.

L^p:p 次可积函数类,$1\leqslant p<\infty$.

L^∞:本性有界函数类.

L 积分:Lebesgue 积分.

Lip:Lipshitz 函数类.

LS 积分:Lebesgue-Stieltjes 积分.

$M(X)$:X 上的可测函数之全体.

$M^+(X)$:X 上的非负可测函数之全体.

m:Lebesgue 测度.

$\mathbf{N}$:自然数集①.

---

① 本书自然数集为$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$,不包含数 0.

Q:有理数集.

R:实数集;$\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$.

R 积分:Riemann 积分.

RS 积分:Riemann-Stieltjes 积分.

$S(X)$:X 上的简单函数之全体.

$S^+(X)$:X 上的非负简单函数之全体.

2^X:X 的所有子集之集.

$X \times Y$:X 与 Y 的积集.

χ_A:集 A 的特征函数.

$\omega = |\mathbf{N}|$:自然数集之基数.

$f_n \uparrow f$:f_n 对 n 单调增且 $f_n \to f$.

$f_n \downarrow f$:f_n 对 n 单调减且 $f_n \to f$.

$f_n \to f$:f_n 按点收敛于 f.

$f_n \rightrightarrows f$:f_n 一致收敛于 f.

$f_n \xrightarrow{\mu} f$:f_n 依测度 μ 收敛于 f.

$f_n \to f$,a.u.:f_n 几乎一致收敛于 f.

$f_n \to f(L^p)$:f_n 依 L^p 范数收敛于 f.

$\triangleq$:定义为.

$\square$:定理或命题证毕.

几点说明

1. 引证 §1.1(1)表示§1.1中式(1);1.1.1(i)表示定理(或命题、定义)1.1.1之(i);[1,p.1]表示参考文献[1]中第1页.

2. 指标用法 不致误解时,出现于$\sum$,$\prod$,$\bigcup$,$\bigcap$下的指标予以省略.下标n总表自然数.$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$依情况可写成:

$$\sum_{n\in\mathrm{N}} a_n, \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_n a_n \text{ 或 } \sum a_n.$$

$\prod a_n$,$\bigcup A_n$等仿此.$\bigcup A_n$总可看作无限可数并(必要时增加一些空集项);$\bigcap A_n$仿此.

3. 逻辑符号 $\forall$:对一切;$\exists$:存在某个;$\Rightarrow$:推出;$\Leftrightarrow$:等价于.

4. 极限记号 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$简写作$\lim\limits_n x_n$;$\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn}$简写作$\lim\limits_{m,n} x_{mn}$;$f(x^{\pm}) = \lim\limits_{y\downarrow 0}(x\pm y)$,其中$y\downarrow 0$表示$0<y\to 0$.未作说明时,极限值包括$\pm\infty$.

5. 广义实数$\pm\infty$ ∞总是指$+\infty$;$[0,\infty]=[0,\infty)\cup\{\infty\}$,$[-\infty,\infty]$仿此;$\forall\, a\in[-\infty,\infty]$,约定$0\cdot a=0$.

6. 上下确界 设$A\subset[-\infty,\infty]$.则$\sup A=\infty \Leftrightarrow A\subset[-\infty,\infty)$且$A$上方无界或$\infty\in A$;$\inf A=-\infty\Leftrightarrow A\subset(-\infty,\infty]$且$A$下方无界或$-\infty\in A$.

7. $A+B=\{a+b:\ a\in A, b\in B\}$,$A+x$仿此;$-A=\{-a:\ a\in A\}$.

8. 当const用在式子中时,它表示某个常数,其具体数值难以或不必明确写出.

关于习题的说明

1° 习题A中所列问题大多是对书中结论的直接应用，或为本书主要概念提供的释例，一般稍加思考即可顺利解决，它们对于完成本课程所要求的基本训练是必不可少的.

2° 习题B是为有深入钻研兴趣且力有余裕的读者准备的，其中许多问题有一定难度. 但也有一些问题未必很难，只是所涉及的材料不关乎本书的核心内容，不宜放在习题A中.

3° 为简便起见，所有要求读者证明的问题，都只写出所要证的命题，而略去"求证"之类的词.

4° 考虑到使用本书的教师挑选习题的方便，每章的习题都是依据该章正文内容的顺序安排的.

5° 书末所附的"习题答案与提示"大概是学生与教师所欢迎的. 它虽然有些简略，但应当说已经够用. 任何代替读者思考的作法都是有害的，因此不拟提供一份详细的习题解答. 如果读者在参看"答案与提示"之前，能尽可能独立地解决问题，那么必将感到获益匪浅.

目　录

第一章　集与点集

由德国数学家Cantor所创立的集合论，是现代数学中一个独立的分支.按其本性而言，集合论是整个现代数学的逻辑基础；而就其发展历史而言，则与近代分析——包括实变函数论——的发展密切相关.实变函数通常是第一门大量运用集合论知识的大学数学课程.因此，在现代数学教育中，对集合论知识的较系统的介绍，通常构成实变函数教材的第一章.不过，对于实变函数论来说，集合论毕竟只是一个辅助工具.因此，本章仅介绍那些必不可少的集论知识，并不深入它的专门课题.而且，我们始终采用朴素的观点，不涉及任何有关集论公理的讨论.

§1.1　集合及其运算

集合如同几何学中的点一样，是最基本的数学概念，对它难以严格定义，但可给予一种朴素的描述.通常称具有一定性质的对象之全体为集或集合，称其中的对象为该集的元或元素.集合的元素必须彼此互异(如$\{a,b,b\}$与$\{a,b\}$应看作同一个集)，而且归属明确(如不能说“大数的集合”，究竟什么数属于这一集合并不明确).一般以大写字母A,B,X,Y等表示集合，以小写字母a,b,x,y等表示集的元素.若a是集A的元素，则说a属于A，记作$a\in A$；以$a\overline{\in}A$表示a不属于A.不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$.只含一个元素a的集记作$\{a\}$，称之为**单元素集**.注意$\{a\}\neq a$！约定以专用字母表示一些最常用的集.例如，字母$\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$分别记自然数集、整数集、有理数集、实数集与复数集.

表示集的方法通常有两种.其一是列举法，例如，10以内的素数

之集是$\{2,3,5,7\}$；而

$$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

这种表示法显然很受局限.较一般的方法是通过给出集合中元素所满足的条件来表示集合:若 $x\in A \Leftrightarrow x$ 满足条件 P,则将集 A 表为 $\{x: x$ 满足 $P\}$.例如,

$$\mathbf{N}=\{k: k\in\mathbf{Z}\text{ 且 }k>0\}.$$

上式也简写作 $\mathbf{N}=\{k\in\mathbf{Z}: k>0\}$.类似地,$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}: a<x<b\}$,$[a,\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant a\}$,等等.

1.1.1 定义 设 A,B 是两个集合.若 A 的元都是 B 的元,则说 A 包含于 B 或 B 包含 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,且称 A 为 B 的子集.若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$,则说 A 与 B 相等,记作 $A=B$.若 $A\subset B\neq A$,则称 A 为 B 的真子集.约定空集$\varnothing$是任何集合的子集.

例如,设 $A=\{1\}$,$B=\{1,2\}$,$C=\{x\in\mathbf{R}: x^2-3x+2=0\}$,则 A 有两个子集,即 A 与$\varnothing$；$B=C$,且 B 有四个子集,即 B,$\varnothing$,$\{1\}$与$\{2\}$,后三个集是 B 的真子集.

一般地,若 A 含 n 个元素,则 A 恰有 2^n 个子集.这启示出如下记号:任给集 A,它的子集之全体记作 2^A,称它为 A 的**幂集**.

设 I 是一非空集.若对每个 $i\in I$,指定了一集 A_i,则称$\{A_i: i\in I\}$为一个集族,也简写作$\{A_i\}$.注意集族中诸集不必互异.称集族$\{A_n: n\in\mathbf{N}\}$为集列,通常简写作$\{A_n\}$.若 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$(或 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$),则称集列$\{A_n\}$为**升列**(或**降列**)；升列与降列合称为**单调列**.以上概念可与实数的序列、增序列、减序列及单调列相对照,在本书中它们将被大量使用.

在运用集合时,经常需要将一复杂的集分解为某些较简单的集的某种“组合”,或利用已知集合构造特定的新集,这都依赖于集的运算.下面就来给出集运算的定义.

1.1.2 定义 给定集 $A,B,A_i(i\in I)$,令

$$A\cup B=\{x: x\in A\text{ 或 }A\in B\};\tag{1}$$

$$A\cap B=\{x: x\in A\text{ 且 }A\in B\};\tag{2}$$

$$A\backslash B=\{x: x\in A \text{ 且 } A\overline{\in} B\};\tag{3}$$

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A);\tag{4}$$

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x:(\exists\, i\in I)\ x\in A_i\};\tag{5}$$

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x:(\forall\, i\in I)\ x\in A_i\}.\tag{6}$$

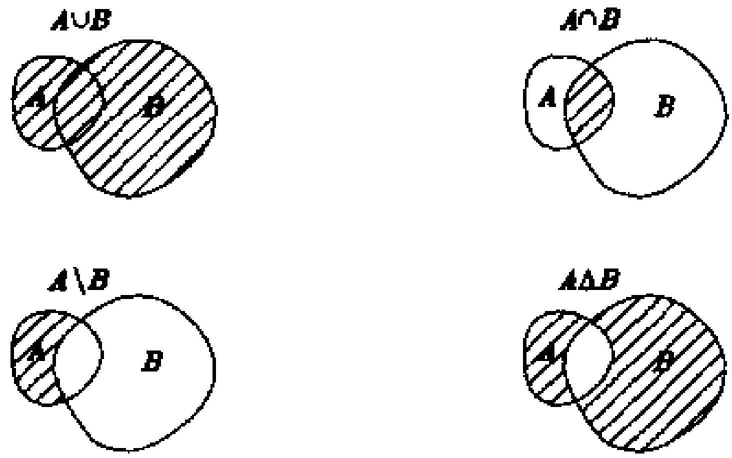


图 1-1

其中 $A\cup B, A\cap B, A\backslash B, A\Delta B$ 分别称为 A 与 B 的并、交、差、对称差；$\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ 与 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ 分别称为 $A_i(i\in I)$ 的并与交，二者通常分别简写作 $\bigcup\limits_i A_i$ 与 $\bigcap\limits_i A_i$，或 $\bigcup A_i$ 与 $\bigcap A_i$. 若 $I=\mathbf{N}$，则 $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$ 也写作 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$；$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 仿此.

若 $A\cap B=\varnothing$，则说 A 与 B 互不相交；若集族 $\{A_i\}$ 中任意两个集互不相交，则称 $\bigcup A_i$ 为一个**不交并**. 例如，令 $A_n=[n,n+1)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 是一个不交并，它等于 $[1,\infty)$.

在讨论某一问题时，通常有某个"最大"的集 X 包含所有涉及的集，此时称 X 为**全集**；当 $A\subset X$ 时称 $X\backslash A$ 为 A 在 X 中的**补集**，记作 A^c. ①显然

① 国标规定 A 的补集用 $\complement A$ 表示. 但为排印方便，本书用 A^c 表示.

$$A^{cc}=A, A\backslash B=A\cap B^c;$$
$$A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing;$$
$$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B^c, A\subset B\Leftrightarrow A^c\supset B^c.$$

这些简单结论今后将反复用到.

集运算所满足的规则可综合如下.

1.1.3 命题 设 $A,B,A_i\subset X(i\in I)$,则成立以下等式:

$$\begin{cases}(\bigcup_i A_i)^c=\bigcap_i A_i^c\\(\bigcap_i A_i)^c=\bigcup_i A_i^c\end{cases}\quad (对偶律);\tag{7}$$

$$A\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(A\cup A_i)\quad (并对交的分配律);\tag{8}$$

$$A\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(A\cap A_i)\quad (交对并的分配律);\tag{9}$$

$$A\cup A=A=A\cap A\quad (幂等律);\tag{10}$$

$$A\cup\varnothing=A=A\cap X.\tag{11}$$

证 不妨只证(7)的第一式,其他各式的证法是类似的. 若 $x\in(\bigcup A_i)^c$,则 $x\bar{\in}\bigcup A_i$,于是由(5)知 $\forall\, i\in I$,有 $x\bar{\in}A_i$,这表明 $x\in\bigcap A_i^c$. 因此$(\bigcup A_i)^c\subset\bigcap A_i^c$. 反之,若 $x\in\bigcap A_i^c$,则 $\forall\, i\in I$,有 $x\in A_i^c$,即 $x\bar{\in}A_i$,从而 $x\bar{\in}\bigcup A_i$,于是 $x\in(\bigcup A_i)^c$. 故得$\bigcap A_i^c\subset(\bigcup A_i)^c$,因此$(\bigcup A_i)^c=\bigcap A_i^c$. □

以上证法可概括为如下一般模式:为证一个集等式 $A=B$,只需证:若 $x\in A$,则 $x\in B$; 反之,若 $x\in B$,则 $x\in A$. 这类推理今后将多次运用.

在 1.1.3 中,**对偶律**(7)是最重要的,它给出了通过取补而使并与交互相转化的途径,有广泛的应用. 例如,利用对偶律可从(8)推出(9):

$$\begin{aligned}A\cap(\bigcup_i A_i)&=[A^c\cup(\bigcup_i A_i)^c]^c\quad (用(7))\\&=[A^c\cup(\bigcap_i A_i^c)]^c\quad (用(7))\\&=[\bigcap_i(A^c\cup A_i^c)]^c\quad (用(8))\end{aligned}$$

$$= \bigcup_i (A^c \cup A_i^c)^c \qquad (用(7))$$

$$= \bigcup_i (A \cap A_i). \qquad (用(7))$$

在本书中，利用集运算分解一些复杂的集合，是一必须掌握的基本技巧. 试看两个例子.

例 1 设 f 是集 X 上的实值函数，$A=\{x\in X: f(x)>0\}$，$A_n=\{x\in X: f(x)>1/n\}(n\in\mathbf{N})$. 用 $\{A_n\}$ 表示集 A.

解 因 $f(x)>0 \Leftrightarrow \exists\, n\in \mathrm{N}: f(x)>1/n$，故 $x\in A \Leftrightarrow \exists\, n\in \mathbf{N}: x\in A_n$，这表明 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

例 2 设 $f, f_n (n=1,2,\cdots)$ 是集 X 上的实值函数，

$$A=\{x\in X: \lim_n f_n(x)=f(x)\};$$

$$A_{mn}=\{x\in X: |f_n(x)-f(x)|<1/m\}.$$

用集 $A_{mn}(m,n=1,2,\cdots)$ 表示集 A.

解 由极限的定义，有

$$f_n(x)\to f(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall\, m\in\mathbf{N}, \exists\, n\in\mathbf{N}, \forall\, k\geqslant n: \ |f_k(x)-f(x)|<1/m$$

$$\Leftrightarrow \forall\, m\in\mathbf{N}, \exists\, n\in\mathbf{N}, \forall\, k\geqslant n: \ x\in A_{mk}.$$

这结合交与并的定义(见式(5)和式(6))得出：

$$A=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_{mk}. \tag{12}$$

形如(12)的式子似乎很复杂，但极有应用价值. 为方便起见，引进以下概念：

1.1.4 定义 设 $\{A_n\}$ 是一集列. 令

$$\overline{\lim_n}\, A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k; \tag{13}$$

$$\underline{\lim_n}\, A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k. \tag{14}$$

二者分别称为集列 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限；若它们相等，则称之为集列 $\{A_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_n A_n$，此时说集列 $\{A_n\}$ 收敛.

直接看出，$x\in\overline{\lim\limits_n}\, A_n \Leftrightarrow$ 有任意大的 n 使 $x\in A_n$；$x\in\underline{\lim\limits_n}\, A_n \Leftrightarrow$

当 n 充分大时 $x\in A_n$. 若 $\{A_n\}$ 为升列，则它必收敛且 $\lim\limits_n A_n=\bigcup A_n$；若 $\{A_n\}$ 为降列，则 $\lim\limits_n A_n=\bigcap A_n$. 显然 $\{\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\}$ 与 $\{\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\}$ 分别为降列与升列，因此式(13)与(14)可改写为：

$$\overline{\lim_n}\, A_n=\lim_n\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k;$$

$$\underline{\lim_n}\, A_n=\lim_n\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

以上结论可与数列的上下极限类比：若 $\{x_n\}$ 是一实数列，则对应于(13)，(14)有

$$\overline{\lim_n}\, x_n=\lim_n\sup_{k\geqslant n}x_k=\inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n}x_k;\tag{15}$$

$$\underline{\lim_n}\, x_n=\lim_n\inf_{k\geqslant n}x_k=\sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n}x_k.\tag{16}$$

利用集列极限，现在可将例 1 的结论写成 $A=\lim\limits_n A_n$；而式(12)可写成 $A=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\underline{\lim\limits_n}\, A_{mn}$.

设 $A\subset X$. 在 X 上定义一函数 χ_A 如下：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\in A^c.\end{cases}\tag{17}$$

称 χ_A 为集 A 的特征函数. 借助于特征函数，可将集合之间的关系转化为相应的特征函数之间的数量关系；特别，集运算可转化为特征函数的相应运算. 基本的结论如下：

1°　$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A=0$；$A=X\Leftrightarrow\chi_A=1$.

2°　$A=B\Leftrightarrow\chi_A=\chi_B$；$A\subset B\Leftrightarrow\chi_A\leqslant\chi_B$.

3°　$A=\bigcup\limits_i A_i\Leftrightarrow\chi_A=\max\limits_i\chi_{A_i}$.

4°　$A=\bigcap\limits_i A_i\Leftrightarrow\chi_A=\min\limits_i\chi_{A_i}=\prod\limits_i\chi_{A_i}$.

5°　$A=B^c\Leftrightarrow\chi_A=1-\chi_B$；$\chi_{A\Delta B}=|\chi_A-\chi_B|$.

6°　$A=\overline{\lim\limits_n}\, A_n\Leftrightarrow\chi_A=\overline{\lim\limits_n}\,\chi_{A_n}$；$A=\underline{\lim\limits_n}\, A_n\Leftrightarrow\chi_A=\underline{\lim\limits_n}\,\chi_{A_n}$；

$A=\lim\limits_n A_n\Leftrightarrow\chi_n=\lim\limits_n\chi_{A_n}$.

以上结论的证明不难. 读者应能自行完成.

1.1.5 定义 给定集合 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，一切有序元素组 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)(x_i\in X_i,1\leqslant i\leqslant n)$构成一集，称它为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的积集，记作 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n}X_i$（亦简写作 $\prod\limits_i X_i$），即

$$\prod_{i=1}^{n} X_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ x_i\in X(1\leqslant i\leqslant n)\}.\qquad(18)$$

若 $X_i=X(1\leqslant i\leqslant n)$，则将 $\prod\limits_i X_i$ 写作 X^n，称它为 X 的 n 重积或 n 次幂.

形式上，1.1.5 定义了集合的"乘法"运算. 但须注意，这种运算与 1.1.2 所定义的集运算有一原则差别：若 $A,B\subset X$，则 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 等皆为 X 的子集，但一般未必有 $A\times B\subset X$！

积集被广泛使用，常见的例子是：

1° n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，正是 $\mathbf{R}$ 的 n 重积：

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ x_i\in\mathbf{R}(1\leqslant i\leqslant n)\}\qquad(19)$$

（与式(18)对照）. $\mathbf{R}^1$ 即 $\mathbf{R}$；$\mathbf{R}^2$ 就是实平面.

2° $\mathbf{Q}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有理点之全体，即

$$\mathbf{Q}^n=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n):\ r_i\in\mathbf{Q}(1\leqslant i\leqslant n)\}.\qquad(20)$$

3° $\mathbf{Z}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中有整数坐标的点之全体，即

$$\mathbf{Z}^n=\{(k_1,k_2,\cdots,k_n):\ k_i\in\mathbf{Z}(1\leqslant i\leqslant n)\}.$$

直观上，$\mathbf{Z}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一格子网的结点之集.

4° 给定区间 $I,J\subset\mathbf{R}$，

$$I\times J=\{(x,y):\ x\in I,y\in J\}$$

是 $\mathbf{R}^2$ 中一矩形. 一般地，对任何集 A,B，通常将积集 $A\times B$ 形象地看作一个以 A,B 为"边"的矩形.

§1.2 映 射

在数学分析课程中，读者已熟悉了一个或多个实变量的函数概念. 将其一般化，就得到如下的映射概念.

1.2.1 定义 设 X,Y 是两个非空集. 若对每个 $x\in X$,有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,则称这一对应为映射. 通常以某个字母如 f 表示一个映射,且将对应于 x 的 y 记作 $f(x)$;称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 $f:\ X\to Y$,或

$$f:\ X\to Y,\ x\to f(x). \tag{1}$$

在数学中,映射如同集合一样是具高度一般性的基础概念,它用于所有数学分支,只是在不同场合,由于习惯的原因,可能采用不同的名称,诸如映照、映象、变换、算子、函数等等. 函数这一名称主要用于 $Y=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 的情况. 但将一般的映射称为函数亦无不可,且有如下好处:关于通常函数概念的许多术语与处理方法可以自然移用于一般情况. 例如,可以称 $f(x)$ 为 f 在 x 的"函数值"(它不必是数!),说 f"定义于 X 上取值于 Y 中",X 就是**定义域**,而 $\{f(x):\ x\in X\}$ 是**值域**;将 $X\times Y$ 的子集

$$\mathrm{Gr}\, f=\{(x,f(x)):\ x\in X\} \tag{2}$$

称为 f 的**图形**,它未必真能画出来,但一个如图 1-2 的示意图常能起到启发思路的作用.

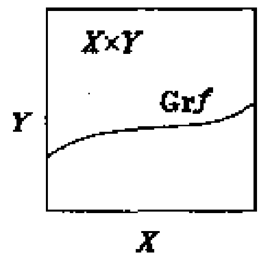


图 1-2

下面是映射的各种具体例子.

1° 设 f 是定义于区间$[a,b]$上的实函数,如 $f(x)=\sin x$,则 f 是从$[a,b]$到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,即

$$f:\ [a,b]\to\mathbf{R},\ x\to\sin x.$$

2° 设 f 是定义于平面区域 D 上的实函数如 $f(x,y)=xy$,则 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,即

$$f:\ D\to\mathbf{R},(x,y)\to xy.$$

一般地,任何代数运算都是映射.

3° 设 f 是定义于区间 I 上的向量值函数,如 $f(t)=(\cos t,\sin t,t)$,则 f 是从 I 到 $\mathbf{R}^3$ 的一个映射,即

$$f:I\to\mathbf{R}^3,\ t\to(\cos t,\sin t,t).$$

4° 每个实数列$\{x_n\}$可看作一个映射f,即

$$f: \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ n \to x_n.$$

5° 每个集列$\{A_n\}$实质上也是一个映射f,即

$$f: \mathbf{N} \to 2^X,\ n \to A_n,$$

其中$X = \bigcup A_n$.

6° 任给$A \subset X$,A的特征函数χ_A是从X到$\mathbf{R}$的一个映射,即

$$\chi_A: X \to \mathbf{R},\ x \to \chi_A(x).$$

7° 设$\mathscr{A}$是2^X的非空子集(称为集类,或不严格地称为集族,尽管它与前面界定的集族概念略有区别),则任何映射$\mu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ $(=[-\infty,\infty])$称为$\mathscr{A}$上的**集函数**. 集函数在本书中起重要作用.

1.2.2 定义 设$f: X \to Y$是一映射. 若当$x, y \in X$, $x \neq y$时恒有$f(x) \neq f(y)$,则称f为单射;若f以Y为值域,则称f为满射;若f既是单射又是满射,则称f为双射,此时每个$y \in Y$唯一地对应一个$x \in X$,使得$f(x) = y$,称这个对应为f的逆映射,记作f^{-1},即

$$f^{-1}: Y \to X,\ f(x) \to x. \tag{3}$$

显然,逆映射正是通常反函数概念的推广.

例 1 设$f(x) = x^2$. 若限定f定义于区间$[0,\infty)$上,则$f: [0,\infty) \to [0,\infty)$是一双射,其逆映射(即反函数)就是

$$f^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \to \sqrt{x}.$$

注意,$f: [0,\infty) \to \mathbf{R}$不是满射,从而没有逆映射;另一方面,将$f$看作定义于$\mathbf{R}$上时不是单射,因而也没有逆映射.

1.2.3 定义 设$f: X \to Y$与$g: Y \to Z$是两个映射. 任给$x \in X$,令$h(x) = g(f(x))$,则得到一个映射$h: X \to Z$,称它为g与f的复合映射,记作$g \circ f$,即

$$g \circ f: X \to Z,\ x \to g(f(x)). \tag{4}$$

若$A \subset X$是一非空集,则称映射$A \to Y$, $x \to f(x)$为f在A上的限制,记作$f|A$. 若$F: X_1 \to Y$是另一映射,$X \subset X_1$,且当$x \in X$时

$F(x)=f(x)$，即 $F|X=f$，则称 F 为 f 的扩张.

显然，复合映射正是通常复合函数概念的推广. 若 $f: X\to Y$ 是双射，则 f 与其逆映射 f^{-1} 的复合映射满足：

$$f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(y)) = y(x\in X, y\in Y). \tag{5}$$

上面考虑映射 $f: X\to Y$ 时，只涉及 X 与 Y 的元素之间的对应关系. 实际上，f 也建立 X 与 Y 的子集之间的一定对应关系，在本书中，后者甚至更有意义. 准确的描述如下.

1.2.4 定义　设 $f: X\to Y$ 是一个映射. 任给 $A\subset X$, $B\subset Y$，令

$$f(A)=\{f(x): x\in A\}; \tag{6}$$

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}. \tag{7}$$

称 $f(A)$ 为 A 在映射 f 下的象；称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的原象.

注意，记号 $f^{-1}(B)$ 的使用与 f 的逆映射是否存在无关. 不过，若 $f: X\to Y$ 是双射，则确有

$$f^{-1}(B)=\{f^{-1}(y): y\in B\}.$$

例 2　依然考虑 $f(x)=x^2$（见例 1）. 取 $A=[0,1]$，则 $f(A)=A$. 若将 f 看作从 $[0,\infty)$ 到 $[0,\infty)$ 的映射，则 $f^{-1}(A)=A$；若将 f 看作从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射，则 $f^{-1}(A)=[-1,1]$，这意味着 $x^2\in[0,1]\Leftrightarrow x\in[-1,1]$.

1.2.5 命题　给定映射 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, $A, A_i\subset X$, $B, B_i\subset Y(i\in I)$, $C\subset Z$，以下结论成立：

(i) $A\subset f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B))\subset B$.

(ii) $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$.

(iii) $(g\circ f)^{-1}(C)=f^{-1}(g^{-1}(C))$.

(iv) $f(\bigcup A_i)=\bigcup f(A_i)$, $f(\bigcap A_i)\subset\bigcap f(A_i)$.

(v) $f^{-1}(\bigcup B_i)=\bigcup f^{-1}(B_i)$, $f^{-1}(\bigcap B_i)=\bigcap f^{-1}(B_i)$.

证　以证(v)为例. 任给 $x\in X$，有

$$x\in f^{-1}(\bigcup_i B_i)\Leftrightarrow f(x)\in\bigcup_i B_i$$

$$\Leftrightarrow \exists\, i \in I: f(x) \in B_i$$
$$\Leftrightarrow \exists\, i \in I: x \in f^{-1}(B_i)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i),$$

这得出 $f^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup f^{-1}(B_i)$. 其次，利用(ii)及对偶律(1.1.3)得

$$f^{-1}(\bigcap_i B_i) = [f^{-1}(\bigcap_i B_i)]^{cc} = [f^{-1}((\bigcap_i B_i)^c)]^c$$
$$= [f^{-1}(\bigcup_i B_i^c)]^c = [\bigcup_i f^{-1}(B_i^c)]^c$$
$$= \bigcap_i [f^{-1}(B_i^c)]^c = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$$ □

§1.3 基数与可数性

给定一集 X 及某个与 X 中的元有关的命题 P，令 $A=\{x\in X:x$ 满足 $P\}$，$B=A^c$. 一个极有意义的问题是：P 在 X 上成立与不成立的可能性哪个更大？这涉及集 A,B 所含元素多少的比较. 对于有限集，这一问题的解决是很简单的：将 A,B 各点数一下就行了. 不过也可以用另一个办法. 例如，要判断一舞场之内男士与女士何者更多，只需让各人去找到自己的舞伴，然后看看没有舞伴的是男士还是女士就行了. 这一方法可推广而用于任何两集的比较.

1.1.3 定义 任给集合 A,B. 若存在一个从 A 到 B 的双射，则说 A 与 B 对等，记作 $A\sim B$. 当 $A\sim B$ 时说集 A 与 B 有相同的基数，以 $|A|$ 记 A 的基数. 若存在一个从 A 到 B 的单射(这相当于 A 对等于 B 的某个子集)，则约定 $|A|\leqslant|B|$. 如果 $|A|\leqslant|B|\neq|A|$，则约定 $|A|<|B|$，并说 A 的基数小于 B 的基数.

若 A 是含 n 个元素的有限集，则就以 n 记 $|A|$；约定 $|\varnothing|=0$. 对于无限集 A，通常也用一个字母如 α 记 $|A|$，且形象地说"A 含有 α 个元". 这样，基数可看作是有限集元素个数的推广. 当 $|A|<|B|$ 时，可以说"B 含有比 A 更多的元素". 另一方面，也可以将基数看作

自然数的推广;而基数不等式 $\alpha<\beta$,则是自然数顺序关系的推广.如同自然数一样,对基数的大小比较有以下基本结果:

1.3.2 定理 设 α,β 是两个基数,则关系 $\alpha<\beta,\alpha=\beta$ 与 $\beta<\alpha$ 三者必居其一且仅居其一.

此定理的证明并不简单,且需用到一定的集论公理,因此从略.从定理直接推出:若 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\alpha$,则必定 $\alpha=\beta$.这一事实常用来判定两个基数相等或两集对等.

约定 $|\mathbf{N}|=\omega,|\mathbf{R}|=c$.直观上,实数远比自然数为多,$\omega<c$ 似乎不成问题,事实上确实如此.

1.3.3 定理 $\omega<c$.

证 令 $A=(0,1]$.定义 $f(n)=1/n(n\in\mathbf{N})$,则 $f:\mathbf{N}\to A$ 是一单射,因此 $\omega\leqslant|A|\leqslant c$,只要证 $\omega\neq|A|$.若 $|A|=\omega$,则存在双射 $\varphi:\mathbf{N}\to A$.每个 $\varphi(n)$ 可唯一地表为十进位小数:

$$\varphi(n)=0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nk}\cdots,\ n=1,2,\cdots,$$

可能从某位开始全为 9,但不允许从某位开始全为 0.若 $a_{nn}=1$,则令 $b_n=2$;若 $a_{nn}\neq1$,则令 $b_n=1(n=1,2,\cdots)$.令 $a=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,则 $a\in A$,于是存在 $n\in\mathbf{N}$ 使 $a=\varphi(n)$,即

$$0.b_1b_2\cdots b_n\cdots=0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots.$$

这推出 $b_n=a_{nn}$,得出矛盾.因此 $\omega\neq|A|$. □

现在,我们已将自然数系延长了:

$$0<1<2<\cdots<n<\cdots<\omega<\cdots<c<\cdots. \quad (1)$$

上面的写法没有肯定 ω 与 c 之间是否有别的基数.实际上,这是一个著名的数学难题!集论的创立者 Cantor 猜想在 ω 与 c 之间不再有其他基数.现代研究已指明 Cantor 猜想与一定集论公理系统相容.式(1)给人以没有最大基数的印象,这确实是对的.事实上,若当 $|A|=\alpha$ 时约定 $|2^A|=2^\alpha$(这一规定是 2 的正整数幂的自然推广),则有以下结果:

1.3.4 定理 对任何基数 α 有 $\alpha<2^\alpha$.

证 取集 A 使 $|A|=\alpha$,可设 $\alpha>0$.注意

$$f: A \to 2^A, a \to \{a\}$$

显然是一单射，故 $\alpha \leqslant 2^\alpha$. 若存在双射 $\varphi : A \to 2^A$，令 $B = \{a \in A : a \overline{\in} \varphi(a)\}$，则 $B \in 2^A$，于是有 $b \in A$ 使 $B = \varphi(b)$. 若 $b \in \varphi(b)$，则由 B 的定义有 $b \overline{\in} B = \varphi(b)$，得出矛盾. 若 $b \overline{\in} \varphi(b)$，则 $b \in B = \varphi(b)$，亦得矛盾. 可见上述的 φ 不可能存在，因此 $\alpha \neq 2^\alpha$，从而 $\alpha < 2^\alpha$. □

基数理论极其深刻且形式优美，但本书用得不多，故不拟深入. 下面主要考虑可数集.

1.3.5 定义 若 $|A| \leqslant \omega$，则称 A 为可数集.

有些作者将有限集排除在可数集之外. 但如此将带来诸多不便，本书不取这种观点.

由定义直接看出，一非空集 A 可数的充要条件是，A 的全体元素可排列成一个有限或无限序列. 不过，要具体写出这一序列通常是不容易的. 因此，需要建立某些一般结果来判定可数性，以下三个定理通常是够用的.

1.3.6 定理 设 $f: A \to B$ 是一映射.

(i) 若 f 为单射，B 可数，则 A 亦可数.

(ii) 若 f 为满射，A 可数，则 B 亦可数.

证 (i) 直接由定义 1.3.1 与 1.3.5 得出.

(ii) 不妨设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 是一无限可数集. 令 $b_n = f(a_n)$，则 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$，其中重复的元可顺次除去. 因此 B 是可数集. □

1.3.7 定理 可数个可数集之并及有限个可数集之积集仍为可数集.

证 1° 对于可数集之并不妨只考虑以下情况：

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nk}, \cdots\}, n = 1, 2, \cdots$$

是一列无限可数集，$A = \bigcup A_n$. A 的元可依多种不同方式排列成一个序列，例如

$$A = \{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, \cdots\},$$

其中重复的元可顺次除去. 因此 A 是可数集.

2° 设 A,B 是可数集,今证 $A\times B$ 可数(然后用归纳法可推出任意有限个可数集之积集可数). 任给 $a\in A$,令 $C_a=\{(a,b): b\in B\}$,则 $A\times B=\bigcup_{a\in A}C_a$. 显然 $C_a\sim B$,从而 C_a 可数,故 $A\times B$ 亦可数. □

1.3.8 定理 设 $I_n(n=1,2,\cdots)$是可数集,

$$A=\{x_{i_1i_2\cdots i_n}: i_k\in I_k,k=1,2,\cdots,n,n=1,2,\cdots\},$$

则 A 是可数集.

证 首先作分解 $A=\bigcup A_n$,其中

$$A_n=\{x_{i_1i_2\cdots i_n}: i_k\in I_k,k=1,2,\cdots,n\},n=1,2,\cdots.$$

对每个 $n(n=1,2,\cdots)$,因 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 可数(1.3.7),而

$$f_n: \prod_{k=1}^{n} I_k\to A_n,(i_1,i_2,\cdots,i_n)\to x_{i_1i_2\cdots i_n}$$

为满射,故 A_n 可数(1.3.6),从而 A 可数(1.3.7). □

利用定理 1.3.6~1.3.8,可以轻而易举地判定一些初看起来似乎“很大”的集的可数性.

例 1 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证 首先作分解 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_+\cup\mathbf{Q}_-\cup\{0\}$,其中 $\mathbf{Q}_\pm=\{r\in\mathbf{Q}: \pm r>0\}$. 显然 $\mathbf{Q}_+\sim\mathbf{Q}_-$,故只需指明 $\mathbf{Q}_+$ 可数. 由 1.3.7, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 可数. 其次,因

$$f: \mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{Q}_+,(m,n)\to m/n$$

显然为满射,故由 1.3.6 知 $\mathbf{Q}_+$ 可数.

由例 1 与 1.3.7 进而推出:$\mathbf{Q}^n$($\mathbf{R}^n$ 中的有理点集,见 §1.1(20))是可数集. 注意 $\mathbf{Q}^n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中处处稠密,似乎是一个“很大”的集,而其实它的元并不比自然数多!对此初学者可能会感到惊讶,但还可举出似乎“更大”的可数集:

例 2 有理系数多项式之全体是可数集.

证 每个有理系数多项式 $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 由其 $n+1(n\geqslant 0)$

个系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 唯一决定，而每个 $a_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 取自可数集 $\mathbf{Q}$，因此直接用 1.3.8 得出所要结论.

有理系数多项式的实零点称为**代数数**，不是代数数的实数称为**超越数**. 因每个 n 次多项式至多有 n 个零点，故由例 2 推出代数数集是可数集. 由 1.3.3 知实数集 $\mathbf{R}$ 是不可数集，因而超越数集亦是不可数集(何故?). 与这一结论表面上相矛盾的事实是：能确切判定的超越数似乎并不多. 例如，数学家作了很大努力才证明了 π 与 e 是超越数. 而现在我们知道，超越数"远远多于"代数数！

§1.4 $\mathbf{R}^n$ 中的点集

本书将考察 $\mathbf{R}^n$ 中的测度与积分，二者都要用到 $\mathbf{R}^n$ 中的点集概念，本节是关于 $\mathbf{R}^n$ 中点集论的一个简要介绍. 无论在实质上或理论形式上，本节内容都与空间维数 n 无关. 不过，为简便起见，用作说明的例子都取于 $\mathbf{R}^1$；而对于概念或结论的理解，适当的 2 维图形大概能提供最有效的直观解释.

如所熟知，$\mathbf{R}^n$ 是有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 之全体. 为方便起见，任给 $x\in\mathbf{R}^n$，总约定 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 x 的坐标. $\mathbf{R}^n$ 依运算

$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$$

$(x,y\in\mathbf{R}^n,\alpha\in\mathbf{R})$ 是一个 n 维向量空间. $\mathbf{R}^n$ 中的元称为**向量**或**点**，$\mathbf{R}^n$ 的子集称为**点集**或 n 维点集. $\forall\ x\in\mathbf{R}^n$，称

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2} \tag{1}$$

为 x 的**模长**. 模长具有以下性质：

(i) 齐次性：$|\alpha x|=|\alpha||x|$；

(ii) 三角不等式：$|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

(iii) 正定性：$|x|\geqslant 0$；$|x|=0\Leftrightarrow x=0$(以上 $x,y\in\mathbf{R}^n$，$\alpha\in\mathbf{R}$，

$0=(0,0,\cdots,0)$记 $\mathbf{R}^n$ 的零元).

任给 $x,y\in\mathbf{R}^n$,称$|x-y|$为点 x 与 y 之间的距离.任给 $A,B\subset\mathbf{R}^n$,称

$$d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}|a-b| \tag{2}$$

为集 A 与 B 之间的距离;约定 $d(x,A)=d(\{x\},A)$(点 x 到集 A 的距离).称

$$\operatorname{diam} A=\sup_{x,y\in A}|x-y| \tag{3}$$

为集 A 的直径,当 $\operatorname{diam} A<\infty$ 时称 A 为有界集.任给 $x\in\mathbf{R}^n$,$r>0$,称

$$B_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n:|y-x|<r\} \tag{4}$$

为以 x 为中心、以 r 为半径的球;当 $n=1,2,3$ 时,$B_r(x)$分别为开区间、圆与通常的球.

若 $x,x^{(k)}\in\mathbf{R}^n(k=1,2,\cdots)$,$|x^{(k)}-x|\to 0(k\to\infty)$,则说序列$\{x^{(k)}\}$收敛于点 x,写作 $x^{(k)}\to x(k\to\infty)$.利用(1)容易验证

$$\max_i|x_i|\leqslant|x|\leqslant\sum_i|x_i|. \tag{5}$$

用(5)直接推出:$x^{(k)}\to x\Leftrightarrow x_i^{(k)}\to x_i(k\to\infty,1\leqslant i\leqslant n)$.这意味着:$\mathbf{R}^n$ 中的序列收敛归结为"依坐标收敛".

给定一点集 $A\subset\mathbf{R}^n$,下面引入一系列与 A 有关的概念,它们是一些直观上很自然的日常用语的精确化.

1.4.1 定义 设 $A\subset\mathbf{R}^n$,$x,y\in\mathbf{R}^n$(参照图 1-3).

(i) 若存在 $r>0$,使 $B_r(x)\subset A$,则称 x 为 A 的内点.以 A° 记 A 的内点之全体,称 A° 为 A 的内部.

(ii) 若$\forall\, r>0$,$B_r(y)$含有 $A\setminus\{y\}$中的点,则称 y 为 A 的极限点(或聚点).以 A' 记 A 的极限点之全体,称 A' 为 A 的导集,

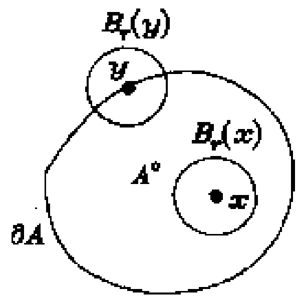


图 1-3

称 $A\bigcup A'$ 为 A 的闭包，记作 $\overline{A}$.

(iii) 令 $\partial A=\overline{A}\cap\overline{A^c}$，称 ∂A 为 A 的边界，称 ∂A 中的点为 A 的边界点.

(iv) 称 $A\setminus A'$ 中的点为 A 的孤立点.

今对以上概念作某些进一步的说明.

1° 若 $x\in A^\circ$，$x^{(k)}\to x$，则当 k 充分大时 $x^{(k)}\in A$. 当 $x\in A^\circ$ 时也称 A 为 x 的邻域.

2° 由定义直接推出：$y\in A'\Leftrightarrow\forall\, r>0$，$B_r(y)$含 A 中无限多个点 $\Leftrightarrow$ 存在 $A\setminus\{y\}$中的序列$\{y^{(k)}\}$，使 $y^{(k)}\to y$. 类似地，$x\in\overline{A}\Leftrightarrow\forall\, r>0$，有 $B_r(x)\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow$ 存在 A 中的序列$\{x^{(k)}\}$，使 $x^{(k)}\to x$ $\Leftrightarrow d(x,A)=0$.

3° 由 ∂A 的定义及上段得出：$y\in\partial A\Leftrightarrow\forall\, r>0$，有 $B_r(y)\cap A\neq\varnothing\neq B_r(y)\setminus A$；$\partial A=\bar{A}\setminus A^\circ$.

4° $x\in A\setminus A'\Leftrightarrow\exists\, r>0$，使 $B_r(x)\cap A=\{x\}$.

以上结论的验证是容易的，留给读者作为练习.

例 1 设 $A=[-1,0)\bigcup\{1/n:n\in\mathbf{N}\}\subset\mathbf{R}$，求 $A^\circ,A',\overline{A},\partial A$.

解 **1°** 显然$(-1,0)\subset A^\circ$. 因 A 中其余的点都不能为 A 的内点，故 $A^\circ=(-1,0)$.

2° 因 $1/n(n\in\mathbf{N})$都是 A 的孤立点，且易见 $-1,0\in A'$，故 $A'=[-1,0]$.

3° $\overline{A}=A\bigcup A'=[-1,0]\bigcup\{1/n:\ n\in\mathbf{N}\}$.

4° $\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ=\{-1,0\}\bigcup\{1/n:\ n\in\mathbf{N}\}$.

对于点集性质的刻画，最重要的概念是内部与闭包. 如以下命题所表明的，它们有某种对偶性.

1.4.2 命题 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，则以下结论成立：

(i) $A^\circ=(\overline{A^c})^c$，$\overline{A}=A^{c\circ c}$.

(ii) $A^\circ\subset A$；$A\subset B\Rightarrow A^\circ\subset B^\circ$；$A^\circ=A^{\circ\circ}$；$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.

(iii) $\overline{A}\supset A$；$A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$；$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$；$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

证 (i) $x\in A^\circ\Leftrightarrow\exists\, r>0$：$B_r(x)\subset A\Leftrightarrow\exists\, r>0$：$B_r(x)\cap A^c=$

$\varnothing \Leftrightarrow x \in \overline{A^c}$，可见 $A^\circ = (\overline{A^c})^c$. 其次，

$$\overline{A} = \overline{A^{cc}} = A^{c\circ c}.$$

(ii) 显然 $A^\circ \subset A$；$A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$；$A^{\circ\circ} \subset A^\circ$. 若 $x \in A^\circ$，则 $\exists r > 0$，使 $B_{2r}(x) \subset A$. $\forall y \in B_r(x)$，$\forall z \in B_r(y)$，有

$$|z - x| \leqslant |z - y| + |y - x| < 2r,$$

故 $z \in B_{2r}(x) \subset A$. 可见 $B_r(y) \subset A$，因此 $y \in A^\circ$，从而 $B_r(x) \subset A^\circ$，$x \in A^{\circ\circ}$. 故得 $A^\circ \subset A^{\circ\circ}$，因此 $A^\circ = A^{\circ\circ}$. 由 $A \cap B \subset A$ 得 $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$；同理 $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$，因此 $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. 若 $x \in A^\circ \cap B^\circ$，则有 $r, s > 0$，使

$$B_r(x) \subset A, B_s(x) \subset B.$$

不妨设 $r \leqslant s$，则 $B_r(x) \subset A \cap B$，从而 $x \in (A \cap B)^\circ$. 故得 $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$，因此 $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(iii) 由(i)(ii)及对偶律(§1.1(7))得出，例如，

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= (A \cup B)^{c\circ c} = (A^c \cap B^c)^{\circ c} \\ &= (A^{c\circ} \cap B^{c\circ})^c = A^{c\circ c} \cup B^{c\circ c} \\ &= \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$

□

现在利用内部、闭包等概念给出几类特殊点集的定义，其中最重要的是开集与闭集，本书中将多次用到.

1.4.3 定义 设 $A \subset \mathbf{R}^n$.

(i) 若 $A = A^\circ$，则称 A 为开集.

(ii) 若 $A = \overline{A}$，则称 A 为闭集. 称有界闭集为紧集；称无孤立点的闭集为完备集.

(iii) 若 $\overline{A} = \mathbf{R}^n$，则称 A 为稠集，或说 A 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密. 若 $B \subset \overline{A}$，则说 A 在 B 中稠密.

(iv) 若 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$，则称 A 为疏集.

对上述各类集可作如下说明：

1° A 是开集 $\Leftrightarrow A^c$ 是闭集. 事实上，$A = A^\circ = (\overline{A^c})^c \Leftrightarrow A^c = \overline{A^c}$. 这一结论有重大意义，它使得每个有关开集的命题(通过取补集)对应一个关于闭集的命题. 显然 $\mathbf{R}^n$，$\varnothing$ 都是开集，因此同时也都是闭

集.可以证明(但并不太容易),$\mathbf{R}^n$,$\varnothing$是 $\mathbf{R}^n$ 中同时为开集与闭集的仅有的两个集.

2° A 是闭集 $\Leftrightarrow \bar{A}\subset A \Leftrightarrow A'\subset A \Leftrightarrow \partial A\subset A \Leftrightarrow A$ 中任何收敛序列的极限属于 A. 只需验证最后一个等价性. 若 A 是闭集, $x^{(k)}\to x$, $x^{(k)}\in A$, 则 $x\in\bar{A}=A$. 反之, 若 A 不是闭集, 则有 $x\in\overline{A}\backslash A$, 取 $\{x^{(k)}\}\subset A$, 使 $x^{(k)}\to x$, 但 $x\notin A$.

3° A 在 B 中稠密 $\Leftrightarrow \forall\, b\in B, \forall\, r>0$, 有 $B_r(b)\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow$ 每个 $b\in B$ 是 A 中某一序列的极限. $\mathbf{R}^n$ 中最重要的稠集是有理点集.

4° A 是疏集 $\Leftrightarrow \mathbf{R}^n=(\bar{A})^{cc}=\overline{A^{c\circ}}\Leftrightarrow A^{c\circ}$是稠集. 若 A 是闭集, 则 A 是疏集 $\Leftrightarrow A^\circ=\varnothing$(即 A 无内点)$\Leftrightarrow A^c$ 是稠集.

在直线上,最简单的开集是开区间,如(a,b),$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. 闭区间 $[a,b]$ 是闭集,而且是紧集与完备集(后者要求 $a<b$). 若$-\infty<a<b<\infty$,则区间 $[a,b)$ 与 $(a,b]$ 既非开集又非闭集. 因此,不要将"开"与"闭"当作互相对立的概念.

关于开集与闭集的运算有以下重要结论.

1.4.4 定理 任意个开集的并及有限个开集的交是开集;任意个闭集的交及有限个闭集的并是闭集.

证 只需证前一半(何故?). 若 $A_i(i\in I)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,则

$$\bigcup_i A_i=\bigcup_i A_i^\circ\subset\left(\bigcup_i A_i\right)^\circ,$$

可见$\bigcup A_i$ 是开集. 若 $A,B\subset\mathbf{R}^n$ 是开集,则

$$A\cap B=A^\circ\cap B^\circ=(A\cap B)^\circ$$

(见 1.4.2),故 $A\cap B$ 是开集. 进而可归纳地证明任何有限个开集的交为开集. □

1.4.4 的意义在于:关于点集的相当一部分结论实际上仅依赖于 1.4.4,而不依赖于开集与闭集的定义. 因此,可用 1.4.4 所述的开集性质作为研究开集的出发点,形成一个抽象的"点集论". 这正是现代"点集拓扑学"中所作的.

注意，无限个开集的交不必为开集，例如$\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n^{-1},n^{-1})=\{0\}$不是开集；无限个闭集的并不必为闭集，例如$\bigcup_{n=1}^{\infty}[n^{-1},0]=(0,1]$不是闭集. 鉴于此，有必要引进两类新的集.

1.4.5 定义 可数个开集的交称为G_δ型集，可数个闭集的并称为F_σ型集.

显然，开集必为G_δ型集，而闭集必为F_σ型集. 其次注意，A是G_δ型集$\Leftrightarrow A^c$是F_σ型集.

§1.5 开集的结构·连续性

上节中已提到开区间是$\mathbf{R}$中最简单的开集. 一个自然的问题是：$\mathbf{R}$中的任一开集是否可由开区间构成？以下定理彻底解决了这一问题.

1.5.1 定理 $\mathbf{R}$中任一非空开集G是可数个互不相交的开区间之并①.

证 任给$x\in G$，令

$$a=\inf\{y:\ (y,x]\subset G\},\ b=\sup\{z:\ [x,z)\subset G\}.$$

因x是G的内点，故必有$(y,z)\subset G$，使$x\in(y,z)$. 因此$-\infty\leqslant a<x<b\leqslant\infty$. 令$I_x=(a,b)$，称$I_x$为$G$的含$x$的**构成区间**. 任给$c\in(a,x)$，由$a$的定义知有$y\in(a,c)$，使$(y,x]\subset G$，因此$c\in G$. 可见$(a,x]\subset G$；同理$[x,b)\subset G$，故$I_x\subset G$. 若$a\in G$，则因$a$是$G$的内点，必有$y<a$，使$(y,a]\subset G$，从而$(y,x]\subset G$，这与$a$的定义矛盾. 因此$a\overline{\in}G$；同理$b\overline{\in}G$. 显然$G=\bigcup_{x\in G}I_x$.

若$I_x=(a,b)$与$I_y=(c,d)$是G的两个不同的构成区间，不妨设$b<d$，则必$b\leqslant c$(否则$b\in I_y\subset G$!)，因此$I_x\cap I_y=\varnothing$. 因每个构成区间中可指定一有理点，而有理点集可数，故G只有可数个互不

① 若在可数集定义(1.3.5)中排除有限集，则此处要改写为"G是有限或可数个互不相交的开区间之并.

相同(从而互不相交)的构成区间. 于是定理得证. □

若将空集也看作一个开区间,如$\varnothing = (a,a)(a\in \mathbf{R})$,则 1.5.1 适用于任何开集 $G\subset \mathbf{R}$.

利用开集与闭集的"互补关系"(即 A 是开集 $\Leftrightarrow A^c$ 是闭集),从 1.5.1 得到

1.5.2 推论 若 $F\subset \mathbf{R}$ 是闭集且 $F\neq \mathbf{R}$,则 F 是从 $\mathbf{R}$ 上挖去可数个互不相交的开区间后所得之集,被挖去的区间称为 F 的**余区间**;当余区间相互没有公共端点时 F 是完备集. 若 F 是紧集,则 F 是从一闭区间挖去可数个互不相交的开区间后所得之集.

证 只需证后一结论. 设 F 是紧集,令 $a=\inf F, b=\sup F$,则 $F\subset [a,b]$. 因 F 是闭集,必定 $a,b\in F$(何故?). 于是

$$G=[a,b]\setminus F=(a,b)\cap F^c$$

是开集(1.4.4),这就可用 1.5.1 得出所要结论. □

下面这个经典例子正好用来说明 1.5.2.

例 1 (Cantor 集) 令 $J=[0,1]$. 从 J 的中心挖去区间(1/3, 2/3);然后从余下的区间[0,1/3]与[2/3,1]的中心各挖去一个长为 3^{-2}的区间(1/9,2/9)与(7/9,8/9);再从余下的 4 个区间的中心各挖去一个长为 3^{-3}的区间,如此继续作下去(参见图 4-1). 这样得到一个紧集 P,称为 Cantor 集. 因挖去的区间没有公共端点,故 P 是完备集. 令$G=J\setminus P$. 容易看出 $\overline{G}=J$,从而 $P^\circ=\varnothing$,故 P 是疏集. 这样,P 是一个完备疏集.

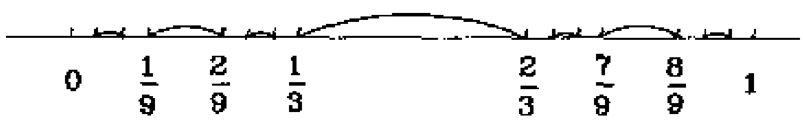


图 1-4

由 1.5.1,一维开集的结构原则上已完全清楚了. 不过,对于一

个具体给定的开集，要明确写出其构成区间并不总是容易的. 例如，设 $\mathbf{Q}=\{r_n: n\in\mathbf{N}\}$ 是有理数之全体，令

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(r_n-\frac{1}{n}, r_n+\frac{1}{n}\right),$$

则 G 是一开集，它的构成区间就无法具体写出来. 可见，一维开集仍然可能呈现出极复杂的面貌.

高维开集的情况更为复杂[①]. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，与开区间相当的是所谓 n 维开方体

$$\prod_i (a_i, b_i)=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): a_i<x_i<b_i(1\leqslant i\leqslant n)\}.$$

然而，并不能断言 $\mathbf{R}^n$ 中的开集都可表为 n 维开方体的不交并. 不过，若以所谓**半开方体**

$$\prod_i [a_i, b_i)=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): a_i\leqslant x_i<b_i(1\leqslant i\leqslant n)\}$$

替代开方体，则可建立如下的

1.5.3 定理　$\mathbf{R}^n$ 中任一非空开集 G 可表为可数个互不相交的 n 维半开方体之并.

证　以 Γ_0 记所有如下的半开方体

$$\prod_i [k_i, k_i+1),\ k_i\in\mathbf{Z}\ (1\leqslant i\leqslant n)$$

之集. 再将每个 $J\in\Gamma_0$ 等分为边长为 $1/2$ 的 2^n 个半开方体，所有这种半开方体构成一集 Γ_1. 进而依次得出 $\Gamma_2, \Gamma_3, \cdots$. 令

$$H_0=\{J\in\Gamma_0: J\subset G\};$$

$$H_k=\{J\in\Gamma_k: J\subset G\setminus\bigcup_{j=0}^{k-1}\bigcup_{I\in H_j} I\}, k=1,2,\cdots;$$

$$A=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{J\in H_k} J.$$

显然 A 是可数个互不相交的半开方体之并，且 $A\subset G$. 只需证 $G\subset A$. 任给 $x\in G$，因 x 是 G 的内点，必有 $r>0$，使 $B_r(x)\subset G$. $\forall k\geqslant 0$，

---

① 初次阅读时，读者可跳过关于高维开集结构的这一段.

有唯一 $J_k \in \Gamma_k$，使 $x \in J_k$. 因 $\operatorname{diam} J_k \to 0 (k \to \infty)$，故当 k 充分大时 $J_k \subset B_r(x) \subset G$，从而必有某个 $J_k \in H_k$，于是 $x \in A$. □

以上结果的重要性在于，它可用来构造"n 维 Lebesgue 测度"(参见 § 2.5).

下面考虑连续性问题. 读者已从数学分析课程熟悉了区间或区域上的连续函数概念，将其稍作推广，就得到 $\mathbf{R}^n$ 中任意点集上的连续函数概念.

1.5.4 定义 设 $X \subset \mathbf{R}^n$；$f: X \to \mathbf{R}$，$a \in X$. 若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x \in X \cap B_\delta(a)$，有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$，则说 f 在点 a 连续. 若 f 在 X 上每点连续，则说 f 在 X 上连续.

约定以 $C(X)$ 记 X 上的连续实值函数之全体；当 $X = [a,b] \subset \mathbf{R}$ 时，$C(X)$ 就写作 $C[a,b]$.

若 $a \in X^\circ$，则当 δ 充分小时 $B_\delta(a) \subset X$，因此 f 在点 a 连续的条件可改写成：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta < 0: \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

这与数学分析教材中的连续性的定义形式上完全一致. 如同在数学分析中一样，连续性也可以用序列极限来刻画：$f: X \to \mathbf{R}$ 在点 $x \in X$ 连续的充要条件是，对 X 中收敛于 x 的任何序列 $\{x^{(k)}\}$，有 $f(x^{(k)}) \to f(x) (k \to \infty)$，表成等式就是

$$\lim_k f(x^{(k)}) = f(\lim_k x^{(k)}).$$

现在我们要用点集论的方法来刻画连续性. 为此，引入以下概念：

1.5.5 定义 设 $A \subset X \subset \mathbf{R}^n$. 若存在开(或闭)集 $B \subset \mathbf{R}^n$，使 $A = X \cap B$，则说 A 相对于 X 是开(或闭)集.

例如，在 $\mathbf{R}$ 上，$A = [0,1)$ 相对于 $[0,\infty)$ 是开集($A = [0,\infty) \cap (-1,1)$)，而相对于 $[-1,1)$ 是闭集($A = (-1,1) \cap [0,1]$)，但 A 在 $\mathbf{R}$ 中既非开集又非闭集. 注意，若 X 本身是开(或闭)集，则 $A \subset X$ 相对于 X 是开(或闭)集 $\Leftrightarrow$ A 本身是开(或闭)集.

1.5.6 定理 设 $X \subset \mathbf{R}^n$，$f: X \to \mathbf{R}$. 则以下条件互相等价：

(i) $f\in C(X)$；

(ii) $\forall\ \alpha\in\mathbf{R}$，$X(f<\alpha)$与$X(f>\alpha)$相对于$X$为开集；

(iii) $\forall\ \alpha\in\mathbf{R}$，$X(f\leqslant\alpha)$与$X(f\geqslant\alpha)$相对于$X$为闭集.

本书中经常用到记号

$$X(f<\alpha)=\{x\in X:\ f(x)<\alpha\};$$

记号$X(f>\alpha)$，$X(f\leqslant\alpha)$与$X(f\geqslant\alpha)$的意义类此.

证　不难看出(ii) ⇔ (iii)，因此只需证(i) ⇔ (ii). 首先设$f\in C(X)$，$\alpha\in\mathbf{R}$. 任给$x\in X(f<\alpha)$，因$f(x)<\alpha$，由连续性，有$r_x>0$，使当$y\in X\cap B_{r_x}(x)$时$f(y)<\alpha$. 令

$$G=\bigcup_{x\in X(f<\alpha)}B_{r_x}(x),$$

则G为开集(1.4.4). 显然$X(f<\alpha)=X\cap G$，故$X(f<\alpha)$相对于X是开集. 同理可证$X(f>\alpha)$相对于X是开集.

其次，设$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}$，$X(f<\alpha)$与$X(f>\alpha)$相对于$X$是开集. 任给$x\in X$，今证$f$在$x$连续. 令$\beta=f(x)$. $\forall\ \varepsilon>0$，因$X(f<\beta+\varepsilon)$相对于X为开集，故有开集$B\subset\mathbf{R}^n$，使

$$X(f<\beta+\varepsilon)=X\cap B.$$

显然$x\in B$，故有$r>0$，使$B_r(x)\subset B$，于是当$y\in X\cap B_r(x)$时$y\in X(f<\beta+\varepsilon)$，即

$$f(y)<f(x)+\varepsilon.$$

同理有$s>0$，使当$y\in X\cap B_s(x)$时$f(y)>f(x)-\varepsilon$. 令$\delta=\min\{r,s\}$，则当$y\in X\cap B_\delta(x)$时$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，可见f在x连续. □

由1.5.6推出：若X是开集，则$f\in C(X)\Leftrightarrow\forall\ \alpha\in\mathbf{R}$：$X(f<\alpha)$与$X(f>\alpha)$是开集；若$X$是闭集，则$f\in C(X)\Leftrightarrow\forall\ \alpha\in\mathbf{R}$：$X(f\leqslant\alpha)$与$X(f\geqslant\alpha)$是闭集.

1.5.6是用点集论方法刻画函数性质的第一个重要定理. 与传统的数学分析方法相比，点集论方法在风格上是很不相同的，读者在初学时值得细加体会.

可以从两方面应用1.5.6. 首先，从1.5.6直接得出大量开集与

闭集的例子. 例如,

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ y<x^2\}$$

与

$$\{x\in\mathbf{R}^n:\ d(x,A)<r\}$$

是开集;当 $<$ 改为 $\leqslant$ 时以上两集是闭集. 一般地,若一集 A 由一组不等式界定,不等式中出现的函数皆连续,则当使用不等号 $<$ 与 $>$ 时 A 是开集,当使用不等号 $\leqslant$ 与 $\geqslant$ 时 A 是闭集. 例如,若 $f\in C[a,b]$, 则 f 的"下方图形"

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)\}\tag{1}$$

是闭集.

另一方面,也可应用 1.5.6 来判定连续性.

例 2 设 $X=\bigcup F_i, F_i\subset\mathbf{R}^n(1\leqslant i\leqslant k)$是互不相交的闭集, $f: X\to\mathbf{R}$, f 限制在每个 F_i 上连续,则 $f\in C(X)$.

证 $\forall\,\alpha\in\mathbf{R}$,由

$$X(f\geqslant\alpha)=\bigcup_{i=1}^{k}F_i(f\geqslant\alpha)$$

及假设知 $X(f\geqslant\alpha)$是闭集. 同理 $X(f\leqslant\alpha)$亦是闭集,因此由1.5.6 知 $f\in C(X)$.

△§ 1.6 关于 n 维点集的基本定理

如所熟知,经典微积分学的严格理论表述依赖于几条基本定理,即 Cauchy 收敛原理、有限覆盖定理、区间套定理及 Bolzano-Weierstrass 极限点定理. 本节在 n 维点集论的框架内重建这些定理,并指出它们实质上是互相等价的.

1.6.1 Cauchy 收敛原理 一个序列$\{x^{(k)}\}\subset\mathbf{R}^n$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{k,l\to\infty}|x^{(k)}-x^{(l)}|=0.\tag{1}$$

注 通常称(1)为 Cauchy 条件,称满足 Cauchy 条件的序列为

Cauchy 序列.

证 若 $x^{(k)}\to x(k\to\infty)$，则由

$$|x^{(k)}-x^{(l)}|\leqslant|x^{(k)}-x|+|x-x^{(l)}|$$

看出条件(1)满足. 反之，若条件(1)满足，则

$$|x_i^{(k)}-x_i^{(l)}|\leqslant|x^{(k)}-x^{(l)}|\to 0\ (k,l\to\infty,1\leqslant i\leqslant n)$$

(用 §1.4(5)). 于是由 1 维情况下的 Cauchy 收敛原理有 $x_i^{(k)}\to x_i\in\mathbf{R}(k\to\infty,1\leqslant i\leqslant n)$. 令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则(再用 §1.4(5))

$$|x^{(k)}-x|\leqslant\sum_i|x_i^{(k)}-x_i|\to 0(k\to\infty),$$

可见 $x^{(k)}\to x$. □

设 $F\subset\mathbf{R}^n$，$\mathscr{U}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一族子集. 若 $F\subset\bigcup_{U\in\mathscr{U}}U$，则称 $\mathscr{U}$ 为集 F 的一个**覆盖**，当 $\mathscr{U}$ 是开集族时称 $\mathscr{U}$ 为 F 的**开覆盖**，当 $\mathscr{U}$ 是有限族时称 $\mathscr{U}$ 为**有限覆盖**. 若 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$ 是 F 的覆盖，则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的**子覆盖**.

1.6.2 有限覆盖定理 若 $\mathscr{U}$ 是紧集 F 的开覆盖，则可从 $\mathscr{U}$ 中取出有限子覆盖.

证 用反证法. 设不存在有限子覆盖. 取一 n 维方体 $C_0=\prod_i[a_i,b_i]$，使 $F\subset C_0$. 将 C_0 等分为 2^n 个边长减半的 n 维方体，其中必有一个(记作 C_1)，使 $F\cap C_1$ 不被 $\mathscr{U}$ 中有限个集覆盖. 再将 C_1 等分为 2^n 个 n 维方体，其中必有一个(记为 C_2)，使 $F\cap C_2$ 不被 $\mathscr{U}$ 中有限个集覆盖. 如此作下去，得到一个 n 维方体的降列 $\{C_k\}$，使每个 $F\cap C_k$ 不被 $\mathscr{U}$ 中有限个集覆盖，而 $\operatorname{diam}C_k\to 0(k\to\infty)$. 任取 $x^{(k)}\in F\cap C_k(k=1,2,\cdots)$，则当 $l\geqslant k$ 时

$$|x^{(k)}-x^{(l)}|\leqslant\operatorname{diam}C_k,$$

这推出条件(1)满足. 由 1.6.1 及 F 为闭集，有 $x^{(k)}\to x\in F$. 取 $U\in\mathscr{U}$，使 $x\in U$；取 $r>0$，使 $B_r(x)\subset U$. 因 $x^{(k)}\in C_k$ 而

diam $C_k\to 0$，故当 k 充分大时 $F\cap C_k\subset C_k\subset B_r(x)\subset U$，这与 $F\cap C_k$ 不被 $\mathscr{U}$ 中有限个集覆盖相矛盾. 因此必可从 $\mathscr{U}$ 中取出有限子覆盖. □

1.6.3 闭集套定理 设 $\{F_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中非空有界闭集的降列，则 $\bigcap F_k\neq\varnothing$.

证 用反证法. 若 $\bigcap F_k=\varnothing$，则 $\bigcup F_k^c=\mathbf{R}^n$，从而 $\{F_k^c\}$ 是紧集 F_1 的一个开覆盖. 由 1.6.2，必有 $k\geqslant 1$，使 $\{F_j^c: 1\leqslant j\leqslant k\}$ 覆盖 F_1. 于是

$$F_1\subset\bigcup_{j=1}^{k}F_j^c=(\bigcap_{j=1}^{k}F_j)^c=F_k^c,$$

这与 $F_k\subset F_1$ 相矛盾. 因此 $\bigcap F_k\neq\varnothing$. □

1.6.4 Bolzano-Weierstrass 极限点定理 若 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是有界无限集，则 $A'\neq\varnothing$.

证 取 A 的无限可数子集 $\{x^{(k)}\}$，令 $F_k=\{x^{(j)}: j\geqslant k\}(k=1,2,\cdots)$，则 $\{F_k\}$ 是一降列. 若 $A'=\varnothing$，则 $F_k'=\varnothing$，从而 F_k 是有界闭集. 由 1.6.3 应有 $\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\neq\varnothing$，这显然是不可能的. 因此必定 $A'\neq\varnothing$. □

1.6.4 显然可以写成以下等价形式：

1.6.5 定理 $\mathbf{R}^n$ 中任何有界序列必含收敛子列.

现在给出从 1.6.5 推出 1.6.1 的证明. 设序列 $\{x^{(k)}\}\subset\mathbf{R}^n$ 满足条件(1)，则易知 $\{x^{(k)}\}$ 有界，于是由 1.6.5 知它有一收敛子列：$x^{(k_j)}\to x(j\to\infty)$. $\forall\,\varepsilon>0$，取 $N>0$，使当 $k,l\geqslant N$ 时有

$$|x^{(k)}-x^{(l)}|<\varepsilon,$$

于是当 j 充分大时有

$$|x^{(k)}-x^{(k_j)}|<\varepsilon\ (k\geqslant N).$$

令 $j\to\infty$ 得 $|x^{(k)}-x|\leqslant\varepsilon\ (k\geqslant N)$，这表明 $x^{(k)}\to x(k\to\infty)$.

由此可见，定理 1.6.1 ～ 1.6.5 在逻辑上互相等价. 从具体应用考虑，在很多情况下用 1.6.5 是最方便的，下面就是一例.

1.6.6 定理 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是一紧集，$f\in C(X)$. 则 f 在 X 上取

得最大值与最小值；f 在 X 上一致连续，这意味着 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \forall\ x, y \in X$，当 $|x-y| < \delta$ 时 $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

证 1° 令 $\beta = \sup\limits_{x \in X} f(x)$. 由 sup 的定义，有序列 $\{x^{(k)}\} \subset X$，使 $f(x^{(k)}) \to \beta\ (k \to \infty)$. 因 X 有界，故由 1.6.5 知 $\{x^{(k)}\}$ 有收敛子列，不妨就设 $x^{(k)} \to x$. 因 X 是闭集，必 $x \in X$. 由连续性，有 $f(x^{(k)}) \to f(x) = \beta$，显然 β 就是 f 在 X 上的最大值. 同理可证 f 在 X 上取得最小值.

2° 若 f 在 X 上非一致连续，则有 $\varepsilon > 0, x^{(k)}, y^{(k)} \in X (k = 1, 2, \cdots)$，使得 $|x^{(k)} - y^{(k)}| \to 0 (k \to \infty)$，而

$$|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| \geqslant \varepsilon.$$

如上段证明，不妨设 $x^{(k)} \to x \in X$，从而 $y^{(k)} \to x (k \to \infty)$，于是

$$\varepsilon \leqslant \lim_k |f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| = |f(x) - f(x)| = 0,$$

得出矛盾. 因此 f 在 X 上一致连续. □

评　注

1. 在常识认可范围内的集合概念是尽人皆知的，人们很少意识到要加以系统研究. 但数学中有关数系、极限过程的深入研究激起人们考察无限集的兴趣，这导致集合论的诞生. 德国数学家 G. Cantor(1845-1918)被公认为是集合论的首创者. 这位犹太血统的数学家是数学王国中真正当之无愧的革新者，他从 1874 年开始在一系列论文中阐发了同代人闻所未闻的全新理论. 由于他勇敢地闯入许多数学家颇为忌讳的无穷领域，而且奇论迭出，同代人对他不无歧见，Klein，Poincare′ 等大数学家对他的理论就颇感疑惑. 但 Cantor 的思想在许多领域带来了令人惊异的成果，正是这些成果促使数学界最终接受了集合论. Hilbert 为传播 Cantor 的思想起了重要作用，他将

Cantor 的理论赞誉为"数学思想的最惊人的产物,在纯粹理性范畴中人类活动最优美的表现之一"(参考[11]中的第 41 章).

2. Cantor 思想的精髓无疑体现在他的无限集理论中.什么是无限集,却是一个貌似简单但并不平凡的问题.如本章开头所申明的,本书对集论问题持朴素的观点,自然回避那些从常识看来过分严谨的逻辑论证.即便如此,揭示有限集与无限集的如下本质区别还是饶有趣味的:无限集必可对等于它的某个真子集,有限集则无此性质.证明前者是容易的:设 A 是无限集,则必可依次从 A 中取出无限个元 $a_n(n=1,2\cdots)$.令 $B=\{a_n: n\in \mathbf{N}\}$,$B_1=\{a_{2n}: n\in \mathbf{N}\}$,则 $B\sim B_1$,从而 $A\sim B_1\cup(A\backslash B)=A_1$,$A_1$ 是 A 的真子集.关于有限集结论的证明要麻烦些,可参看[14]的第一章.这样,我们可以给出如下严格定义:

定义 若一集对等于它的某个真子集,则称它为无限集;不是无限集的集称为有限集.

不过,我们并不建议读者将以上定义作为讨论无限集的出发点.

3. 将集合区分为可数集与不可数集,只是走向深奥的基数理论的最初一步.即使这种初步的划分也蕴涵了深刻的结果,并启发出富有活力的思想.简单说来,可数性概念的价值在于:若 X 是不可数集,则从 X 中除去任意**可数个**可数集之后其基数不变,因而就元素多少而言,不可数集中的任何可数子集都是无足轻重的.例如,代数数在实数系中是无足轻重的;或者说,在实数中,代数数是"稀有的",而超越数则是"一般的".这就为刻画"稀有"与"一般"这一对立范畴给出了一种有力的数学方法,这一方法的惊人效果无论历史上或今天都是令人印象深刻的.

4. 对于 1 维及 n 维点集的研究,乃由经典分析的深入发展所驱动.19 世纪下半叶,分析中一些深刻研究导致考虑愈来愈复杂的点集,如某些高度复杂的函数的连续点或可微点之集,Fourier 级数的收敛域,等等.对于点集的早期研究与一般集合论的开创工作结合在一起,Cantor 的许多结果就是在《关于无限线性点集》这一总标题

下发表的. 点集论的深入发展逐渐显示出，它的基本课题既不同于无需任何空间结构的抽象集合论，也用不到 Euclid 空间中如此丰富的具体结构. 点集论的大多数结果仅依赖于关于所论空间的几条简单假设. 一旦数学家们认识到这一点，抽象的点集论也就因之诞生，它就是建立于本世纪初的**点集拓扑学**. 今天，它如同集合论一样是现代数学的理论基石之一，有兴趣的读者可在许多入门书籍中读到它. 不过，本书中点集论仅有辅助意义，读者只要了解最基本的定义与结论，且能作初步的运用就行了.

5.　诸如 Cantor 集一类的疏集可能给人以这样的印象，似乎疏集可用来描述"稀有性". 但疏集类不对可数并运算封闭，因此引入概念：称可数个疏集的并为**第一纲集**，非第一纲集称为**第二纲集**. 可以证明 $\mathbf{R}^n$ 是第二纲集. 因一个第二纲集除去任意**可数个**第一纲集之后仍为第二纲集，故在某种意义上可以说，第二纲集中的第一纲集是无足轻重的. 这就为刻画"稀有性"与"一般性"提供了另一种方法，它与基于可数性的方法有类似之处，但显然更深入到空间的结构，因而往往导致更深刻的结论. 沿这一方向所展开的研究涉及现代数学的许多高深领域，当然不是本书所能介绍的. 但这些研究所赖以展开的原始思想却很简单，读者不难初步体会.

习　题　A

1. $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$.
2. 求 $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup C$ 的充要条件.
3. $(A\setminus B)\setminus(C\setminus D)\subset(A\setminus C)\cup(D\setminus B)$.
4. $A\Delta B=B\Leftrightarrow A=\varnothing$.
5. $(\bigcup A_i)\setminus(\bigcup B_i)\subset\bigcup(A_i\setminus B_i)$.
6. 若 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 是升列，则 $(\bigcup A_n)\cap(\bigcup B_n)=\bigcup(A_n\cap B_n)$.
7. $(\overline{\lim_n} A_n)^c=\underline{\lim_n} A_n^c$；$(\underline{\lim_n} A_n)^c=\overline{\lim_n} A_n^c$.
8. $\lim_n A_n$ 存在 $\Leftrightarrow\lim_n\chi_{A_n}$ 存在；$A=\lim_n A_n\Leftrightarrow\chi_A=\lim_n\chi_{A_n}$.

9. 设 $A_{2n-1}=A, A_{2n}=B(n=1,2,\cdots)$，求 $\varliminf_{n} A_n$ 与 $\varlimsup_{n} A_n$.

10. 设 $f_n: X\to \mathbf{R}(n=1,2,\cdots)$，用 $A_{mn}=X(f_n>m)$ 表示 $X(f_n\to\infty)$ $(=\{x\in X: f_n(x)\to\infty\})$.

11. $f: X\to Y$ 是满射 $\Leftrightarrow \forall B\subset Y: f(f^{-1}(B))=B$.

12. 设 $f: X\to Y, A, B\subset Y$，则 $f^{-1}(A\backslash B)=f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$.

13. $f: X\to Y$ 是双射 $\Leftrightarrow f(X)=Y$ 且对任何 $A,B\subset X$ 有 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

14. 作一双射 $f: [0,1]\to(0,1)$.

15. 作一双射 $f: [0,1]\to\mathbf{R}$.

16. 作一双射 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$.

17. 设 $|X|>\omega\geqslant|A|$，则 $|X\backslash A|=|X\cup A|=|X|$.

18. 以有理点为端点的区间仅可数个.

19. $\mathbf{R}^2$ 中至少有一圆周不含有理点.

20. 一可数集仅含可数多个有限子集.

21. 设 $z,w\in\mathbf{R}^2$ 非有理点，$z\neq w$，则有连接 z,w 的折线 L，使 L 不含有理点.

22. $2^{\omega}=c$.

23. $|[0,1]\times[0,1]|=c$.

24. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$，则 A° 是开集，$\bar{A}, A', \partial A$ 是闭集.

25. $(A\cup B)'=A'\cup B'$.

26. $A^{\circ}\cap\bar{B}\subset\overline{A\cap B}$.

27. $A\subset\mathbf{R}^n$ 是开集 $\Leftrightarrow \forall B\subset\mathbf{R}^n$，有 $A\cap\bar{B}\subset\overline{A\cap B}$.

28. 设 $f(x)=\sin x^{-1}(x\neq 0), f(0)=0, A=\mathrm{Gr}\, f$. 求 $A^{\circ}, \bar{A}, A'$.

29. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 只有孤立点，则 A 是可数集.

30. $\mathbf{R}^n$ 中的开集或闭集同时是 F_σ 型集与 G_δ 型集.

31. 设 A' 可数，则 A 可数.

32. 设 $G\subset H\subset\mathbf{R}$，$G,H$ 是开集，则 G 的每个构成区间含于 H 的某个构成区间.

33. 设 A 是 Cantor 集 P 在 $[0,1]$ 中的余区间的中点之全体，求 A'.

34. 设 $f_k\in C(\mathbf{R}^n)(k=1,2,\cdots), a\in\mathbf{R}$，则 $\mathbf{R}^n(\varliminf_{k} f_k<a)$ 是 F_σ 型集，$\mathbf{R}^n(\varlimsup_{k} f_k\geqslant a)$ 与 $\mathbf{R}^n((\varlimsup_{k} f_k=\infty)$ 是 G_δ 型集.

35. $[0,1]$中的数用十进位小数表示时用不着 7 的一切数构成一完备集.

习 题 B

36. 若 $A\Delta B = A\Delta C$，则 $B = C$.

37. 集列$\{A_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{A_n\}$的任何子列收敛.

38. 设 $A_n = \{m/n:\ m \in \mathbf{Z}\}(n = 1,2,\cdots)$，则$\varliminf\limits_n A_n = \mathbf{Z}$，$\varlimsup\limits_n A_n = \mathbf{Q}$.

39. 设 $0<a_n<1<b_n$，$a_n \downarrow 0$，$b_n \downarrow 1$，则 $\lim\limits_n [a_n, b_n] = (0,1]$.

40. 设 $f_n: X \to \mathbf{R}(n \to \infty)$，$f_n \to \chi_A(n \to \infty)$，求 $\lim\limits_n X(f_n \geqslant 1/2)$.

41. 设$\{A_n\}$为升列，$A \subset \bigcup A_n$，对任何无限集 $B \subset A$，存在 n 使 $B \cap A_n$ 为无限集，则 A 含于某个 A_n.

42. 设 $f: 2^X \to 2^X$，当 $A \subset B \subset X$ 时 $f(A) \subset f(B)$，则存在 $A \subset X$ 使 $f(A) = A$.

43. 设 X 是无限集，$f: X \to X$，则有 X 的非空真子集 A，使 $f(A) \subset A$.

44. 设$|A| > 1$，则有双射 $f: A \to A$，使得$\forall\ x \in A: f(x) \neq x$；当$|A| =$ 偶数或$|A| \geqslant \omega$时可要求 $f(f(x)) = x(\forall\ x \in A)$.

45. 设$|B| \leqslant |A| = |A \times A|$，$|A| \geqslant \omega$，则 $|A \cup B| = |A|$.

46. 设 $|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| = c$，则 $\exists\ n: |A_n| = c$.

47. $|C[0,1]| = c$.

48. $|\mathbf{R}^{\mathbf{R}}| = 2^c$，$\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 是函数 $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 之全体.

49. 设 $\mathscr{T}$ 是 1 维开集之全体，则$|\mathscr{T}| = c$.

50. 设$|X| \geqslant \omega$，B 是双射 $f: X \to X$ 之全体，求$|B|$.

51. 不存在集族$\{A_\alpha\}$，使对任何集 B 有某个 $\alpha: |A_\alpha| = |B|$.

52. 设 $f: X \to \mathbf{R}$ 满足 $\sup\{|\sum f(x_i)|:\ \{x_i\} \subset X$ 为有限集$\}<\infty$，则 $X(f \neq 0)$为可数集.

53. 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 在每点取局部极小值，则 f 仅取可数个值.

54. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$，$\forall\ x \in \mathbf{R}^n$，$\exists\ r > 0$: $A \cap B_r(x)$可数，则 A 可数.

55. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$ 可数，则有 $x \in \mathbf{R}^n$ 使 $A \cap (A + x) = \varnothing$，其中 $A + x = \{a + x:\ a \in A\}$.

56. 设 $E \subset \mathbf{R}^2$ 可数，则有分解 $E = A \cup B$，$A \cap B = \varnothing$，使每条直线 $x = x'$ 只含 A 中有限个点，每条直线 $y = y'$ 只含 B 中有限个点.

57. 设 A 是 $\mathbf{R}^2$ 中如下直线 L 之全体：当 $(x,y)\in L$ 且 $x\in\mathbf{Q}$ 时 $y\in\mathbf{Q}$，求 $|A|$.

58. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$ 是互不相交的闭集，则有互不相交的开集 G,H，使 $A\subset G,B\subset H$.

59. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是可数稠集，则 A 不是 G_δ 型集.

60. 不存在 $[0,1]$ 上的实函数，使在有理点连续而在无理点间断.

61. 设 P 是 Cantor 集，则 $P+P=\{x+y:\ x,y\in P\}=[0,2]$.

62. $\mathbf{R}$ 上任何实函数 f 的连续点之集是 G_δ 型集.

63. $A\subset\mathbf{R}^n$ 同时为 F_σ 型集与 G_δ 型集的充要条件是：存在序列 $\{f_k\}\subset C(\mathbf{R}^n)$，使 $f_k\to\chi_A$.

64. 作一非连续映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使 f 映开集为开集.

65. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 可微，$\forall\, a\in\mathbf{R}$，$\mathbf{R}(f'=a)$ 是闭集，则 f' 处处连续.

66. 设 $\{G_k\}$ 是 n 维开集的升列，F 是 $\bigcup G_k$ 的紧子集，则 F 含于某个 G_k.

67. 设 $\{F_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧集的降列，$\bigcap F_k\subset G\subset\mathbf{R}^n$，$G$ 是开集，则 G 包含某个 F_k.

68. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$，则从 A 的任一开覆盖可取出可数子覆盖.

69. 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是紧集，$f_k\in C(X)$，$f_k\rightrightarrows f(k\to\infty)$，则

$$f(X)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty}f_i(X)}.$$

70. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集且 A 有界，则存在 $a\in A$ 与 $b\in B$，使得 $|a-b|=d(A,B)$.

第二章　测度与可测函数

本章包含两项互相关联的内容：测度与可测函数，二者构成本书核心内容“积分论”的基础．引进测度有两个基本目的．其一是为定义积分作准备．正如对区域上的函数定义重积分需要区域的面积（或体积）概念一样，在更一般的集合上定义积分需要集合的测度概念，后者正是长度、面积与体积等几何度量概念的推广．其二是用来精确刻画函数的性质．例如，若 A 是函数 f 的不可微点之全体，则 A 的测度定量地刻画了 f 的可微性．测度论给函数的研究方法带来了革命性的变化，导致一系列深刻的结果．为以上两方面的需要，可测函数概念是必要的．

对于 Lebesgue 测度与抽象测度，本章前两节以可直接应用的形式给出了它们的基本性质，而将较繁琐的构造过程移入本章之末．读者初学时可在 §§ 2.1 ～ 2.4 的基础上进入后面各章．

§ 2.1　Lebesgue 测度

对于一个区间，例如 $[a,b]$，熟知其长度为 $b-a$．对一般的集合 $A\subset\mathbf{R}$，似乎很难给它界定一个“长度”．但不少数学问题强烈地促使人们去考虑一维点集的“长度”．例如，设 A 是某函数 f 的间断点之全体，若对 A 能赋予适当的“长度”mA，则 mA 给出了 f 连续性的一个定量刻画：mA 愈小，f 的连续性就愈好；若 $mA=0$，则 f“几乎处处”连续．诸如此类的问题表明推广长度概念势在必行．我们希望，推广后的“长度”概念能用于很一般的一维点集，同时又能保持通常长度概念的基本特征．这一非凡的任务已由法国数学家 Lebesgue 出色地完成．Lebesgue 的理论包含一些精巧的构造与较繁冗的技术性处

理，其细节对于初学者不是很有吸引力的. 不过，最终结论倒极简单明了. 它们综合在以下定理中.

2.1.1 定理 存在集族 $\mathscr{L}\subset 2^{\mathbf{R}}$ 与集函数 $m: \mathscr{L}\to[0,\infty]$，使得它们具有以下两组性质：

($\mathbf{P}_1$) $\varnothing\in\mathscr{L}$；

($\mathbf{P}_2$) 若 $A_n\in\mathscr{L}(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup A_n\in\mathscr{L}$；

($\mathbf{P}_3$) 若 $A\in\mathscr{L}$，则 $A^c\in\mathscr{L}$；

($\mathbf{P}_4$) 若 $G\subset\mathbf{R}$ 是开集，则 $G\in\mathscr{L}$；

($\mathbf{Q}_1$) $m\varnothing=0$；

($\mathbf{Q}_2$) σ-可加性：若 $A_n\in\mathscr{L}(n=1,2,\cdots)$ 互不相交，则

$$m(\bigcup A_n)=\sum mA_n;$$

($\mathbf{Q}_3$) 完备性：若 $mA=0$，$B\subset A$，则 $B\in\mathscr{L}$；

($\mathbf{Q}_4$) 测度单位：$m[0,1]=1$；

($\mathbf{Q}_5$) 平移不变性：若 $A\in\mathscr{L}$，$x\in\mathbf{R}$，则 $A+x\in\mathscr{L}$ 且 $m(A+x)=mA$；

($\mathbf{Q}_6$) 逼近性质：任给 $A\in\mathscr{L}$，$\varepsilon>0$，存在闭集 F 与开集 G，使 $F\subset A\subset G\subset\mathbf{R}$，$m(G\backslash F)<\varepsilon$.

以上的 m 称为(1 维)Lebesgue 测度，$\mathscr{L}$ 中的集称为 Lebesgue 可测集；为简便起见，本节中就称为测度与可测集. 2.1.1 中，性质($\mathbf{P}_1$)～($\mathbf{P}_4$)刻画了可测集族 $\mathscr{L}$ 的构成，而($\mathbf{Q}_1$)～($\mathbf{Q}_6$)则表达了测度 m 的特征. 所有这些性质都是很自然的，它们不过是关于长度的直觉印象中那些最不容置疑的结论的推广与补充. 所列举的性质并非完全互相独立，例如显然($\mathbf{P}_4$)⇒($\mathbf{P}_1$)，($\mathbf{Q}_2$)⇒($\mathbf{Q}_1$). 不将($\mathbf{P}_1$)，($\mathbf{Q}_1$)删去是为了便于测度理论的推广. 注意，性质($\mathbf{P}_2$)与($\mathbf{Q}_2$)都自然涵盖了有限并的情况. 事实上，任何有限并总可看作无限可数并，如 $A\cup B=A\cup B\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$. 今后遇到类似情况时都作此理解.

2.1.1 的证明是冗长的，放在本章最后. 下面从 2.1.1 推出一系列结论，依据这些结论，测度的面貌将足够清晰，且能方便地使用，而

这正是我们所主要关心的.

首先，关于可测集的运算有以下良好结果：

2.1.2 命题 若 $A_n\in\mathscr{L}(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap A_n\in\mathscr{L}$；若 $A,B\in\mathscr{L}$，则 $A\backslash B\in\mathscr{L}$.

证 这由 $\bigcap A_n=(\bigcup A_n^c)^c$，$A\backslash B=A\bigcap B^c$ 及性质($\mathbf{P}_1$)～($\mathbf{P}_3$)推出. □

综合性质($\mathbf{P}_1$)～($\mathbf{P}_3$)与2.1.2得出结论：可测集经差运算及可数次并或交运算后仍为可测集. 这与性质($\mathbf{P}_4$)一起推出：开集经差运算及可数次并与交运算而得之集(称为 Borel 集，严格定义见 §2.5)，皆为可测集；特别，F_σ 型集与 G_δ 型集是可测集. 于此，已可见可测集的广泛性.

其次，关于测度 m 有以下结果：

2.1.3 命题 测度 m 有以下性质：

(i) 单调性：若 $A,B\in\mathscr{L}$，$A\subset B$，则 $mA\leqslant mB$.

(ii) 可减性：若 $A,B\in\mathscr{L}$，$A\subset B$，$mA<\infty$，则

$$m(B\backslash A)=mB-mA.$$

(iii) 次可加性：若 $A_n\in\mathscr{L}(n=1,2,\cdots)$，则

$$m(\bigcup_n A_n)\leqslant\sum_n mA_n.$$

(iv) 下连续性：若 $\{A_n\}\subset\mathscr{L}$ 是一升列，则

$$m(\bigcup_n A_n)=\lim_n mA_n.$$

(v) 上连续性：若 $\{A_n\}\subset\mathscr{L}$ 是一降列，且 $mA_1<\infty$，则

$$m(\bigcap_n A_n)=\lim_n mA_n.$$

证 (i) 注意 $B=A\bigcup(B\backslash A)$，$A\bigcap(B\backslash A)=\varnothing$，于是由性质($\mathbf{Q}_2$)及 $m(B\backslash A)\geqslant 0$ 有：

$$mB=mA+m(B\backslash A)\geqslant mA.$$

当 $mA<\infty$ 时，从上面的等式移项得出(ii).

(iii) 令 $B_1=A_1$，$B_n=A_n\backslash\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i(n=2,3,\cdots)$，则 $B_n(n=$

$1,2,\cdots$)可测、互不相交且$\bigcup A_n=\bigcup B_n$，于是由已证的(i)及性质($\mathbf{Q}_2$)有

$$m(\bigcup_n A_n)=\sum_n mB_n\leqslant\sum_n mA_n.$$

(iv) 令 $A=\bigcup A_n$，$A_0=\varnothing$，则 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\backslash A_{n-1})$. 可设 $mA_n<\infty$(否则结论显然成立)，于是由性质($\mathbf{Q}_2$)及已证的(ii)有：

$$\begin{aligned}mA&=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n\backslash A_{n-1})\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(mA_n-mA_{n-1})\\&=\lim_n\sum_{k=1}^{n}(mA_k-mA_{k-1})\\&=\lim_n mA_n.\end{aligned}$$

(v) 由已证明的(ii)与(iv)推出：

$$\begin{aligned}m(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)&=m(A_1\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1\backslash A_n))\\&=mA_1-m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1\backslash A_n))\\&=mA_1-\lim_n(mA_1-mA_n)\\&=\lim_n mA_n.\end{aligned}$$

□

值得注意的是，2.1.2 和 2.1.3 的陈述与证明完全不涉及实直线 $\mathbf{R}$ 的特殊性质，它们只是 2.1.1 中性质($\mathbf{P}_1$)～($\mathbf{P}_3$)及($\mathbf{Q}_1$)～($\mathbf{Q}_2$)的推论. 在下节中，它们将被推广到更一般的测度. 以下的命题则与性质($\mathbf{Q}_3$)～($\mathbf{Q}_6$)有关，因而依赖于 $\mathbf{R}$ 的特殊结构.

2.1.4 命题 (i) 若 $A\subset\mathbf{R}$ 是可数集，则 $mA=0$.

(ii) 若 A 是区间 $[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$，(a,b)中的任何一个，$a\leqslant b$，则 $mA=b-a$. 当 $a<b=\infty$ 时约定 $b-a=\infty$，其他无限区间仿此.

(iii) 若 $G=\bigcup\delta_k$ 是开集，δ_k 是其构成区间，则 $mG=\sum m\delta_k$.

证　(i) 由性质(Q_2)，只需指明单点集的测度为零. $\forall x \in \mathbf{R}$，$\{x\}$是闭集，因而可测. 由性质(Q_5)，$m\{x\}$与 x 无关. 必定 $m\{x\} = 0$，否则

$$m[0,1] \geqslant m\{1/n:\ n \in \mathbf{N}\} = \sum_{n\in\mathbf{N}} m\left\{\frac{1}{n}\right\} = \infty,$$

与性质(Q_4)矛盾.

(ii) 首先设 $-\infty < a < b < \infty$. 由已证的(i)，区间 $[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$与(a,b)是等测度的. 由性质(Q_2)(Q_4)(Q_5)有

$$1 = m[0,1) = \sum_{i=1}^{p} m\left[\frac{i-1}{p},\frac{i}{p}\right) = p\cdot m[0,1/p),\ p \in \mathbf{N},$$

因此 $m[0,1/p) = 1/p$. 进而推出：对任何正有理数 $r = q/p\,(p,q \in \mathbf{N})$有

$$m[0,r) = \sum_{i=1}^{q} m\left[\frac{i-1}{p},\frac{i}{p}\right) = q\cdot m[0,1/p) = r.$$

任给正实数 β. 取一列正有理数 $r_n\,(n = 1,2,\cdots)$，使 $r_n \uparrow \beta$，则 $[0,\beta) = \bigcup[0,r_n)$，于是由 2.1.3(iv)有

$$m[0,\beta) = \lim_n m[0,r_n) = \beta.$$

再用性质(Q_5)得

$$m[a,b) = m[0,b-a) = b-a.$$

若 $-\infty < a < b = \infty$，则由 2.1.3 (iv)有

$$m[a,\infty) = \lim_n m[a,a+n) = \infty.$$

同理有

$$m(-\infty,b) = \infty\,(-\infty < b \leqslant \infty).$$

(iii)直接由性质(Q_2)推出. □

因 $m[0,1] = 1 > 0$，故由 2.1.4 (i)直接推出 $[0,1]$ 是不可数

集. 这就给出了 1.3.3 的一个基于测度论的极简短的证明①.

例 1 设 P 是 Cantor 集, $G = [0,1]\backslash P$, 则由 2.1.4(iii)有

$$\begin{aligned} mG &= m\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) + m\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) + m\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots \\ &= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right] = 1, \end{aligned}$$

于是由 2.1.3(ii) 有 $mP = m[0,1] - mG = 0$.

可以指明 $|P| = c$. 因此上例表明, 即使与 $\mathbf{R}$ 对等的集, 也可能具有零测度. 由此看来, 测度 m 不足以区分可数集与不可数集.

以下命题使由 $(\mathbf{Q}_6)$ 刻画的逼近性质变得更加清晰.

2.1.5 命题 (i) 若 $A \in \mathscr{L}$, 则

$$\begin{aligned} mA &= \inf\{mG: G \text{ 是开集且 } G \supset A\} \\ &= \sup\{mF: F \text{ 是闭集且 } F \subset A\} \\ &= \sup\{mC: C \text{ 是紧集且 } C \subset A\}. \end{aligned} \tag{1}$$

(ii) $A \in \mathscr{L} \Leftrightarrow$ 存在 F_σ 型集 $F \subset A$ 使 $m(A\backslash F) = 0 \Leftrightarrow$ 存在 G_δ 型集 $G \supset A$ 使 $m(G\backslash A) = 0$.

证 (i) 依次以 α,β,γ 记式(1)中三个等号右端的值, 则显然 $\gamma \leqslant \beta \leqslant mA \leqslant \alpha$, 因此只需证 $\alpha \leqslant \gamma$. $\forall\ \varepsilon > 0$, 由性质$(\mathbf{Q}_6)$有闭集 F 与开集 G, 使得 $F \subset A \subset G$, $m(G\backslash F) < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} \alpha \leqslant mG &= mA + m(G\backslash A) \leqslant mA + \varepsilon \\ &= mF + m(A\backslash F) + \varepsilon \leqslant mF + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

令 $C_n = F \cap [-n,n]$, 则 $\{C_n\}$ 是紧集的升列, 且 $\bigcup C_n = F \subset A$. 于是由 2.1.3(iv) 有 $mC_n \to mF(n \to \infty)$, $mC_n \leqslant \gamma$, 从而

$$\alpha \leqslant \lim_n mC_n + 2\varepsilon \leqslant \gamma + 2\varepsilon.$$

① 当然, 这并不意味着此处的证明比 §1.3 中所给的直接证明优越. 须知, 此处用到的测度论结论已经是一个艰难推理过程的产物.

这推出 $\alpha \leqslant \gamma$，故式(1)得证.

(ii) 只需证第一个等价关系(何故?). 若 $A \in \mathscr{L}$，则由性质($\mathbf{Q}_6$)有闭集 $F_n \subset A$，使 $m(A \setminus F_n) < 1/n$ $(n = 1,2,\cdots)$. 令 $F = \bigcup F_n$，则 F 是 F_σ 型集，$F \subset A$，且 $m(A \setminus F) \leqslant m(A \setminus F_n) \to 0$ $(n \to \infty)$，故 $m(A \setminus F) = 0$. 反之，若有 F_σ 型集 $F \subset A$ 使 $m(A \setminus F) = 0$，则 $A = F \cup (A \setminus F) \in \mathscr{L}$. □

2.1.5(i)表明，可测集 A 的测度 mA 可"从外面"用开集测度逼近，亦可"从里面"用闭集或紧集测度逼近. 这一事实可与用"外切"或"内接"多边形面积逼近平面图形面积的思想类比.

即使 A 不必可测，2.1.5 之证中的 α，β 也是有意义的，分别称之为集 A 的外测度与内测度，记作 m^*A 与 m_*A. 可以证明，对于有界集 A，A 可测 $\Leftrightarrow m^*A = m_*A$. 当初 Lebesgue 正是用这一条件界定可测集的.

2.1.5 (ii) 表明，可测集与 F_σ 型集或 G_δ 型集仅相差一个零测度集. 这就多少明确了可测集类的概貌.

综合 2.1.4 与 2.1.5 得出结论：区间的测度就是其长度；开集的测度是其构成区间的长度之和；可测集的测度是包含该集的开集测度之下确界，而每个可测集是一 F_σ 型集与一零测度集之并，或者是一 G_δ 型集与一零测度集之差. 这些结论表明，具有2.1.1 中性质($\mathbf{P}_1$)～($\mathbf{P}_4$)与($\mathbf{Q}_1$)～($\mathbf{Q}_6$)的 $\mathscr{L}$ 与 m 是唯一确定的.

对于 $\mathbf{R}^n$，有完全类似的结果.

2.1.6 定理 存在唯一的集族 $\mathscr{L} \subset 2^{\mathbf{R}^n}$ 与集函数 $m: \mathscr{L} \to [0,\infty]$，使得它们具有以下两组性质：

($\mathbf{P}_1$) $\varnothing \in \mathscr{L}$;

($\mathbf{P}_2$) 若 $A_k \in \mathscr{L}$ $(k = 1,2,\cdots)$，则 $\bigcup A_k \in \mathscr{L}$;

($\mathbf{P}_3$) 若 $A \in \mathscr{L}$，则 $A^c \in \mathscr{L}$;

($\mathbf{P}_4$) 若 $G \subset \mathbf{R}^n$ 为开集，则 $G \in \mathscr{L}$.

($\mathbf{Q}_1$) $m\varnothing = 0$;

(Q_2) σ-可加性：若 $A_k \in \mathscr{L}(k=1,2,\cdots)$互不相交，则

$$m(\bigcup_k A_k) = \sum_k mA_k;$$

(Q_3) 完备性：若 $mA = 0, B \subset A$，则 $B \in \mathscr{L}$；

(Q_4) 测度单位：$m[0,1]^n = 1$；

(Q_5) 平移不变性：若 $A \in \mathscr{L}, x \in \mathbf{R}^n$，则 $A+x \in \mathscr{L}$，且 $m(A+x) = mA$；

(Q_6) 逼近性质：任给 $A \in \mathscr{L}$ 与 $\varepsilon>0$，存在闭集 F 与开集 G，使 $F \subset A \subset G$，且 $m(G\backslash F) < \varepsilon$.

上述的 m 称为 n 维 Lebesgue 测度，$\mathscr{L}$ 中的集称为 n 维 Lebesgue 可测集；不致误解时，可将"n 维"省去. 但当需要强调维数时，也分别将 $\mathscr{L}$ 与 m 记作 $\mathscr{L}_n$ 与 $m_n(n\geqslant 1)$.

对于 $\mathscr{L}_n$ 与 m_n，相应于 2.1.2～2.1.5 的命题自然成立，类似的证明无需赘述.

需要强调的一点是：一个点集的 Lebesgue 测度或其是否可测与它所在空间的维数有关. 例如，设 $A=[0,\infty)$，则在 $\mathbf{R}$ 中 $mA=\infty$. 另一方面，A 也可看作 $\mathbf{R}^2$ 的子集，此时 $mA=0$. 事实上，$\mathbf{R}^2$ 中任何直线的 2 维 Lebesgue 测度都是零(何故?). $\mathbf{R}$ 的每个子集看作 $\mathbf{R}^2$ 的子集均 Lebesgue 可测，无论它在 $\mathbf{R}$ 中可测与否.

§2.2 测度空间

在上节中我们看到，从很少的几条基本性质出发(2.1.1 中的(P_1)～(P_3)及(Q_1)，(Q_2))，即可推出关于可测集与测度的一系列结论(参看 2.1.2，2.1.3). 这就启示我们：若以(P_1)～(P_3)及(Q_1)，(Q_2)作为基本假设引进某种抽象测度，则它将具有一系列与 Lebesgue 测度相似的性质，这就能大大拓广测度论的应用范围. 这一考虑导致以下定义.

2.2.1 定义 设 X 是一非空集，$\mathscr{A} \subset 2^X$. 若 $\mathscr{A}$ 具有以下性

质：

$(\mathbf{P}_1)$ $\varnothing\in\mathscr{A}$；

$(\mathbf{P}_2)$ 若 $A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup A_n\in\mathscr{A}$；

$(\mathbf{P}_3)$ 若 $A\in\mathscr{A}$，则 $A^c\in\mathscr{A}$，

则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的一个 σ-**代数**，称 $(X,\mathscr{A})$ 为一个**可测空间**，称每个 $A\in\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$-可测集，或简称为可测集. 若 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数，集函数 $\mu:\mathscr{A}\to[0,\infty]$ 具有以下性质：

$(\mathbf{Q}_1)$ $\mu\varnothing=0$；

$(\mathbf{Q}_2)$ σ-可加性：若 $A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$ 互不相交，则

$$\mu(\bigcup_n A_n)=\sum_n \mu A_n,$$

则称 μ 为 X 或 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个测度，称 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 或 X 为测度空间. 若进而假定 μ 满足条件

$(\mathbf{Q}_3)$ 若 $B\subset A\in\mathscr{A}$，$\mu A=0$，则 $B\in\mathscr{A}$，

则称 μ 为**完备测度**.

设 μ 是 X 上的一个测度. $A\subset X$. 若存在 $A_n\subset X\ (n=1,2,\cdots)$，使 $A=\bigcup A_n$，$\mu A_n<\infty$，则说 A 有 σ-有限测度；若 X 本身有 σ-有限测度，则称 μ 为 σ-**有限测度**. 若 $\mu X<\infty$，则称 μ 为有限测度. 若 $\mu X=1$，则称 μ 为**概率测度**，此时可将每个可测集 A 理解为一个"事件"，而 μA 就是事件 A 的概率. 将概率看作测度的观点为概率论带来了革命性的进展.

让我们浏览一下测度的各种例子.

例 1　由 2.1.6，n 维 Lebesgue 测度 m 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个完备测度，它显然是 σ-有限的.

例 2　设 X 是任一非空集. 显然 $\mathscr{A}=2^X$ 是一个 σ-代数. 对任何有限集 $A\subset X$，令 $\mu A=|A|$；若 $A\subset X$ 为无限集，则令 $\mu A=\infty$. 直接看出 μ 满足 2.2.1 中的条件 $(\mathbf{Q}_1)\sim(\mathbf{Q}_3)$（注意 $\mu A=0\Leftrightarrow A=\varnothing$），故 μ 是 X 上的一个完备测度. μ 是 σ-有限的 $\Leftrightarrow$ X 为可数集.

例 2 中的 μ 称为集 X 上的**计数测度**，它固然简单，但不失为一个很有用的测度. 注意，若 $X \subset \mathbf{R}^n$，则 X 上的计数测度与 Lebesgue 测度（假定 X 为 Lebesgue 可测）差别甚大. 例如，对于 $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$，有 $m\mathbf{Q} = 0$，但计数测度 $\mu\mathbf{Q} = \infty$！

例 3 设 X 是任一非空集，取定 $a \in X$. 对任给 $A \subset X$，定义 $\mu A = \chi_A(a)$，则易验证 μ 是 X 上的一个完备概率测度，称它为"点 a 处的 Dirac 测度"，也记作 δ_a.

下面是从已知测度得出新测度的例子.

例 4 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一测度空间，$\varnothing \neq A \in \mathscr{A}$. 令 $\mathscr{A}_A = \{B \in \mathscr{A} : B \subset A\}$，则 $\mathscr{A}_A \subset \mathscr{A}$，$\mathscr{A}_A$ 是 A 上的一个 σ-代数，从而 $(A, \mathscr{A}_A)$ 是一个可测空间. 令 $\mu_A = \mu | \mathscr{A}_A$（参看 1.2.3），则 μ_A 是 $(A, \mathscr{A}_A)$ 上的一个测度，称之为 μ 在 A 上的限制. 通常就写作 μ.

例 5 设 μ_n 是 $(X, \mathscr{A})$ 上的测度，$\alpha_n \in [0, \infty)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 定义 $\mu A = \sum \alpha_n \mu_n A$ $(A \in \mathscr{A})$，则易见 μ 是 $(X, \mathscr{A})$ 上的一个测度，写作 $\mu = \sum \alpha_n \mu_n$.

例如，若以 δ_n 记 $\mathbf{N}$ 上在点 n 处的 Dirac 测度，则 $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ 正是 $\mathbf{N}$ 上的计数测度.

例 6 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一测度空间，$f : X \to Y$ 是一双射. 令 $\mathscr{B} = \{f(A) : A \in \mathscr{A}\}$. 对每个 $B \in \mathscr{B}$，定义 $\nu B = \mu(f^{-1}(B))$，则显然 $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ 是一测度空间. 例如，取 $X = [0, 2\pi)$，$\mu = m$ 是 X 上的 Lebesgue 测度，$Y = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$，则

$$f : X \to Y, t \to e^{it}$$

是一双射，依 $\nu B = m(f^{-1}(B))$ 所定义的测度 ν，正是圆周 Y 上弧长概念的推广.

上节的命题 2.1.2 与 2.1.3 显然适用于任何测度. 为便于查用，给出完全的表述如下.

2.2.2 命题 设 $\mathscr{A}$ 是一 σ-代数. 若 $A_n \in \mathscr{A}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则 $\bigcap A_n \in \mathscr{A}$；若 $A, B \in \mathscr{A}$，则 $A \setminus B \in \mathscr{A}$.

2.2.3 命题　设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一测度空间，则μ有以下性质：

(i) 单调性：若$A,B\in\mathscr{A}$，$A\subset B$，则$\mu A\leqslant\mu B$.

(ii) 可减性：若$A,B\in\mathscr{A}$，$A\subset B$，$\mu A<\infty$，则

$$\mu(B\backslash A)=\mu B-\mu A.$$

(iii) 次可加性：若$A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$，则

$$\mu(\bigcup_n A_n)\leqslant\sum_n\mu A_n.$$

(iv) 下连续性：若$\{A_n\}\subset\mathscr{A}$是一升列，则

$$\mu(\bigcup_n A_n)=\lim_n\mu A_n.$$

(v) 上连续性：若$\{A_n\}\subset\mathscr{A}$是一降列，且$\mu A_1<\infty$，则

$$\mu(\bigcap_n A_n)=\lim_n\mu A_n.$$

测度的上述性质在本书中将被反复运用.

测度的完备性并非处处需要，但缺少完备性有时会有所不便.不过，如以下定理所表明的，任何测度经“微小”修正后都可成为完备测度.

2.2.4 定理　设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一测度空间，则μ可唯一地扩张为某个σ-代数$\overline{\mathscr{A}}\subset 2^X$上的完备测度$\bar{\mu}$，使得以下条件满足：

(P) $\forall\ A\in\overline{\mathscr{A}}$，$\exists\ B,N\in\mathscr{A}$：$B\subset A$，$A\backslash B\subset N$，$\mu N=0$.

证　若$A\subset X$，有$B,N\in\mathscr{A}$，使$B\subset A$，$A\backslash B\subset N$且$\mu N=0$，则定义$\bar{\mu}A=\mu B$，且将所有如上的集A归于集类$\overline{\mathscr{A}}$.今证$\overline{\mathscr{A}}$，$\bar{\mu}$合于定理要求.

1°　证$\overline{\mathscr{A}}$为σ-代数.显然$\mathscr{A}\subset\overline{\mathscr{A}}$，故$\varnothing\in\overline{\mathscr{A}}$.若$A_n\in\overline{\mathscr{A}}$ $(n=1,2,\cdots)$，则有$B_n,N_n\in\mathscr{A}$，使$B_n\subset A_n$，$A_n\backslash B_n\subset N_n$，$\mu N_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$.令$A=\bigcup A_n$，$B=\bigcup B_n$，$N=\bigcup N_n$，则$B,N\in\mathscr{A}$，$B\subset A$，$\mu N=0$，

$$A\backslash B=(\bigcup_n A_n)\backslash(\bigcup_n B_n)\subset\bigcup_n(A_n\backslash B_n)\subset N,$$

可见 $A\in\overline{\mathscr{A}}$. 其次,任给 $A\in\overline{\mathscr{A}}$,取 $B,N\in\mathscr{A}$,使 $B\subset A, A\backslash B\subset N,\mu N=0$,令 $D=(B\cup N)^c$,则

$$D\in\mathscr{A}, D\subset A^c, A^c\backslash D=N\backslash A\subset N.$$

可见 $A^c\in\overline{\mathscr{A}}$.

2° 证 $\bar{\mu}$ 的定义不依赖于 B,N 的选择. 设 $B_i,N_i\in\mathscr{A}, B_i\subset A, A\backslash B_i\subset N_i, \mu N_i=0(i=1,2)$,则 $B_1\backslash B_2\subset A\backslash B_2\subset N_2$,因此 $\mu(B_1\backslash B_2)=0$,于是

$$\mu B_1\leqslant\mu B_2+\mu(B_1\backslash B_2)=\mu B_2.$$

同理 $\mu B_2\leqslant\mu B_1$,故 $\mu B_1=\mu B_2$.

3° 证 $\bar{\mu}$ 为测度. 显然当 $A\in\mathscr{A}$ 时 $\bar{\mu}A=\mu A$,即 $\bar{\mu}$ 是 μ 的扩张;由此推出 $\bar{\mu}\varnothing=0$. 若 $A_n\in\overline{\mathscr{A}}(n=1,2,\cdots)$互不相交,$B_n,N_n$ 如证明之第 1° 段,则 $B_n(n=1,2,\cdots)$必互不相交,于是

$$\bar{\mu}(\bigcup_n A_n)=\mu(\bigcup_n B_n)=\sum_n\mu B_n=\sum_n\bar{\mu}A_n.$$

4° 证 $\bar{\mu}$ 完备. 设 $D\subset A\in\overline{\mathscr{A}}, \bar{\mu}A=0$,则有 $B,N\in\mathscr{A}$,使 $B\subset A$, $A\backslash B\subset N$, $\mu B=\mu N=0$. 注意到

$$\varnothing\subset D, D\backslash\varnothing\subset A\subset B\cup N, \mu(B\cup N)=0,$$

故 $D\in\overline{\mathscr{A}}$.

显然条件(P)唯一确定了$\overline{\mathscr{A}},\bar{\mu}$,故定理证毕. □

定理中的 $\bar{\mu}$ 称为 μ 的**完备化**或完备扩张. 若 μ 本身是完备的,则必定 $\bar{\mu}=\mu$.

本章开头已经提到,引进测度的初衷之一是用来定量地刻画函数的性质. 现在来看这一设想如何实现. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一测度空间,P 是一个与 X 中的点有关的命题,令

$$X(P)=\{x\in X: x \text{ 满足 } P\}.$$

用 $\mu X(P)$来量度"P 在 X 上成立的程度",似乎是很引人瞩目的. 当 μ 是概率测度时,$\mu X(P)$正是任意点 $x\in X$ 满足 P 的概率. 经验表

明，$A^c = 0$ 这一特殊情况尤其值得注意，其中 $A = X(P)$. 故作以下定义.

2.2.5 定义　设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一测度空间，P 是一个与 X 中的点有关的命题. 若存在 $N \subset X$，使 $N^c \subset X(P)$，$\mu N = 0$①，则说 P 在 X 上几乎处处成立，记作 P，a. e.；当必要指明测度 μ 时，就说 P 在 X 上 μ-几乎处处成立，并记作 P，μ-a. e..

例如，$f = g$，a. e. 表示 f 与 g（在 X 上，下同）几乎处处相等；$f \geqslant 0$，a. e. 表示 f 几乎处处非负；$|f| < \infty$，a. e. 表示 f 几乎处处有限；$f_n \to f$，a. e. 表示 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f，等等. 这些概念与记号在本书中将大量使用.

鉴于测度为零的集经常出现且有特殊重要性，今后将采用**零测集**这一较简便的术语来表示测度为零的集.

§2.3　可测函数

本节及下节均设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是给定的测度空间. 当说到 X 上的实函数时，都是指**广义实函数**，即形如 $f: X \to \bar{\mathbf{R}}$ 的映射，其中 $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. 容许 f 取值 $\pm\infty$ 有其方便之处，但也可能引起一些麻烦，必须细心处理. 首先应注意以下约定：

$$\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty = \pm\infty - (\mp\infty);$$

$$\pm\infty + a = \pm\infty = a - (\mp\infty),\ -\infty < a < \infty;$$

$$\pm\infty \cdot a = \pm\infty,\ 0 < a \leqslant \infty;$$

$$\pm\infty \cdot a = \mp\infty,\ 0 > a \geqslant -\infty;$$

$$\pm\infty \cdot 0 = 0 = a/(\pm\infty),\ -\infty < a < \infty;$$

$$|\pm\infty| = \infty.$$

但 $\pm\infty - (\pm\infty)$，$0/0$，∞/∞ 等仍然被认为是无意义的.

① 这一条件显得不那么直接了当. 如果 μ 是完备测度或已知 $X(P)$ 是可测集，则直接要求 $\mu(X(P))^c = 0$ 好了.

前面只是偶尔使用过记号 $X(f>\alpha)$(1.5.6),这类记号今后将系统地使用. 设 $f,g,f_n(n=1,2,\cdots)$是 X 上的实函数,约定:

$$X(f>\alpha)=\{x\in X: f(x)>\alpha\}=f^{-1}((\alpha,\infty]);$$

$$X(\alpha<f<\beta)=\{x\in X: \alpha<f(x)<\beta\}=f^{-1}((\alpha,\beta));$$

$$X(f>g)=\{x\in X: f(x)>g(x)\};$$

$$X(f_n\to f)=\{x\in X: f_n(x)\to f(x)\}.$$

依此类推,$X(f\leqslant\alpha)$与 $X(f=\alpha)$等记号的意义是明显的,不必一一解释.

实变函数论限于考虑**可测函数类**,因为只有对可测函数才便于应用测度论. 尤其是基于测度的 Lebesgue 积分(参见下章),只能用于可测函数. 下面就来定义可测函数.

2.3.1 定义 设 f 是 X 上的实函数. 若$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}$,集 $X(f>\alpha)$恒可测,则称 f 为 X 上的可测函数.

约定以 $M(X)$记 X 上的可测函数之全体.

从形式上看,定义 2.3.1 是够简单的. 但它未必能直接昭示可测函数的直观形象与内在结构,这些只能逐步展示出来. 我们首先给出两个最简单的可测函数的例子.

例 1 设 $f\equiv c\in\overline{\mathbf{R}}$,则 f 可测,因为显然有

$$X(f>\alpha)=\begin{cases}X, & \alpha<c;\\ \varnothing, & \alpha\geqslant c.\end{cases}$$

例 2 设 $f=\chi_A, A\subset X$,则

$$X(f>\alpha)=\begin{cases}X, & \alpha<0;\\ A, & 0\leqslant\alpha<1;\\ \varnothing, & \alpha\geqslant 1.\end{cases}$$

由此可见,f 可测 $\Leftrightarrow$ A 可测.

以上两例固然很特殊,但它们具有典型意义. 下面将看到(2.3.6),利用形如 $f\equiv c$ 及 $\chi_A(A\subset X$ 可测)的函数,通过加法、乘法与极限运算,可得出 X 上任何可测函数.

下面给出可测函数的一系列等价刻画,这些刻画一起更清晰地

展示出可测函数的特性.

2.3.2 命题 对于 X 上的一个实函数 f,以下诸条件互相等价:

(i) $f \in M(X)$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$:集 $X(f \leqslant \alpha)$ 可测;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$:集 $X(f < \alpha)$可测;

(iv) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$:集 $X(f \geqslant \alpha)$可测;

(v) $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}$:集 $X(\alpha < f < \beta)$与 $X(f = \infty)$可测;

(vi) 任给开集 $G \subset \mathbf{R}$:集 $f^{-1}(G)$与 $X(f = \infty)$可测;

(vii) 任给闭集 $F \subset \mathbf{R}$:集 $f^{-1}(F)$与 $X(f = \infty)$可测.

证 证明路线如下:(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (i). 证明基于适当的集分解与可测集的运算性质(2.2.2). 例如,由

$$X(f < \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(f \leqslant \alpha - n^{-1})$$

与

$$X(f > \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([\alpha + n^{-1},\infty)) \cup X(f = \infty)$$

立得(ii) $\Rightarrow$ (iii)与(vii) $\Rightarrow$ (i). 其他各步证明请读者自己完成. □

结合 2.3.2 与 1.5.6 易得出:

2.3.3 推论 设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 可测(未加说明时,在 $\mathbf{R}^n$ 中总采用 n 维 Lebesgue 测度,今后概如此),则 X 上的连续函数均可测,即 $C(X) \subset M(X)$.

下面考虑可测函数的运算,它提供从已知可测函数构成新可测函数的主要方法. 对 X 上的实函数 $f,g,f_n(n = 1,2,\cdots)$,除施行熟悉的代数运算(如 $f \pm g, fg, f/g$)外,还可定义以下运算:

$$\begin{cases} (f \vee g)(x) = \max\{f(x),g(x)\}, \\ (f \wedge g)(x) = \min\{f(x),g(x)\}; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} (\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x), \\ \inf_n f_n = -\sup_n(-f_n); \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \overline{\lim_n} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k, \\ \underline{\lim_n} f_n = -\overline{\lim_n}(-f_n). \end{cases} \tag{3}$$

运算(1)亦可归于(2),例如,$f \vee g = \sup\{f, g, g, \cdots\}$. 令

$$f^+ = f \vee 0, \ f^- = (-f)^+, \tag{4}$$

二者分别称为 f 的**正部**与**负部**,它们满足:

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-. \tag{5}$$

这些分解式在本书中起重要作用.

2.3.4 命题 设 $f, g, f_n \in M(X)(n = 1, 2, \cdots)$. 则 $fg, f \vee g$, $f \wedge g$, f^+, f^-, $|f|$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim_n} f_n$, $\underline{\lim_n} f_n$ 在 X 上均可测;$f \pm g, f/g$ 与 $\lim_n f_n$ 在其有定义的集合上可测.

证 **1°** $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$,有 $\sup_n f_n(x) > \alpha \Leftrightarrow \exists\, n: f_n(x) > \alpha$,即

$$X(\sup_n f_n > \alpha) = \bigcup_n X(f_n > \alpha).$$

这得出 $\sup_n f_n$ 可测. 结合(1)~(5)及事实"f 可测 $\Rightarrow -f$ 可测"易知函数 $\inf_n f_n, \overline{\lim_n} f_n, \underline{\lim_n} f_n, f \vee g, f \wedge g, f^+, f^-$ 皆可测.

2° $f + g$ 在集

$$A = [X(f = \infty) \cap X(g = -\infty)] \cup [X(f = -\infty) \cap X(g = \infty)]$$

上无定义,而 A 是可测集,故 $f + g$ 在一可测集(即 A^c)上有定义. 同理 $f - g, f/g$ 亦如此. 因此证明其可测性时不妨假定它们在 X 上处处有定义. 对任给 $\alpha \in \mathbf{R}$ 不难验证

$$X(f + g > \alpha) = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} [X(f > r) \cap X(g > \alpha - r)],$$

由此推出 $f + g$ 可测. 类似地,可证 fg 与 f/g 可测,只是用到的集分解更繁些,不拟详细写出(利用 2.3.6 可给出更简单的证明,参看后面的例 3).

3° 结合以上两段所证得出 $|f| = f^+ + f^-$ 可测.

4° 令 $\varphi = \overline{\lim_n} f_n, \psi = \underline{\lim_n} f_n$. 因已指出 φ, ψ 可测,故集

$$X(\varphi > \psi) = \bigcup_{r \in Q}[X(\varphi > r) \cap X(\psi < r)]$$

可测. 令 $A = X(\varphi = \psi)$，则 $A = [X(\varphi > \psi)]^c$ 可测. 而在 A 上 $f_n \to \varphi$，故 $\lim_n f_n$ 是定义于 A 上的可测函数. □

设 $f_n \in M(X)(n = 1,2,\cdots)$，$f_n \to f$，a.e.. 当 μ 不是完备测度时，一般不能断定 f 可测. 不过，若令

$$g(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x), & \text{若此极限存在；} \\ 0, & \text{否则，} \end{cases}$$

则由 2.3.4 知 g 可测，且 $g = f$，a.e.. 因此，必要时以 g 取代 f，当 $f_n \to f$，a.e. 时不妨总假定 f 可测.

类似地，若 f，$g \in M(X)$，在 $f \pm g$ 或 f/g 无定义的点规定其值为零，则可以认为 $f \pm g$ 或 f/g 是 X 上的可测函数.

2.3.5 定义 若可测函数 $\varphi: X \to \mathbf{R}$ 仅取有限个值，则称 φ 为**简单函数**.

约定以 $S(X)$ 记 X 上的简单函数之全体.

任给有限个可测集 $e_i \subset X$ 与 $\alpha_i \in \mathbf{R}$，结合例 2 与 2.3.4 知

$$\varphi = \sum \alpha_i \chi_{e_i} \tag{6}$$

是一简单函数. 反之，任给 $\varphi \in S(X)$，设 $\varphi(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，令 $e_i = X(\varphi = \alpha_i)$，则 $e_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是互不相交的可测集，且 φ 可表为式(6)，此时称(6)为简单函数 φ 的**标准表示**.

若 $X \subset \mathbf{R}$ 是一区间，e_i 是 X 的互不相交的子区间，则由(6)表示的 φ 是 X 上的**阶梯函数**. 在某种程度上，简单函数起类似于阶梯函数的作用. 如所熟知，区间上的连续函数可用阶梯函数逼近. 对于可测函数有一类似结果.

2.3.6 定理 设 $f \in M(X)$，则存在一序列 $\{\varphi_n\} \subset S(X)$，使得 $\varphi_n(x) \to f(x)(n \to \infty, x \in X)$，且 $|\varphi_n| \leqslant |f|$. 若 $f \geqslant 0$，则可要求上述的 φ_n 对 n 单调递增.

证 不妨设 $f \geqslant 0$(一般情况可利用分解 $f = f^+ - f^-$ 推出). 令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{i-1}{2^n}, & \dfrac{i-1}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{i}{2^n}, i=1,2,\cdots,n2^n;\\ n, & f(x)\geqslant n\end{cases}$$

(参看图 2-1). 显然 $\varphi_n \in S(X)$ 且

$$0\leqslant \varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}(n=1,2,\cdots).$$

因当 $f(x)<n$ 时

$$0\leqslant f(x)-\varphi_n(x)\leqslant 2^{-n};$$

而当 $f(x)=\infty$ 时 $\varphi_n(x)=n(n=1,2,\cdots)$，故 $\varphi_n(x)\to f(x)(n\to\infty, x\in X)$. □

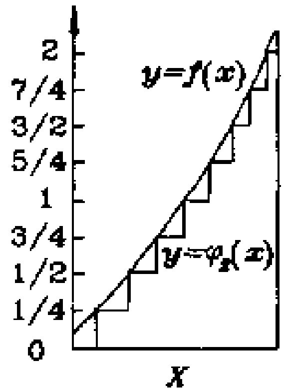


图 2-1

结合 2.3.4 与 2.3.6 得出：X 上的实函数 f 为可测函数的充要条件是，f 是某个简单函数序列的极限函数.

2.3.6 对于可测函数的研究有重大意义，今后将多次用到. 一般的思路是：若要证明某个命题 P 对于可测函数类(或其一部分)成立，则不妨首先证明 P 对简单函数成立(这通常要容易得多)，然后利用 2.3.6，通过一适当的极限过程过渡到一般的可测函数.

例 3 设 $f,g\in M(X)$，则 $fg\in M(X)$(参看 2.3.4).

证 取序列 $\{f_n\},\{g_n\}\subset S(X)$，使 $f_n\to f, g_n\to g$. 不难直接看出 f_ng_n 是简单函数，且 $f_ng_n\to fg$，故 $fg\in M(X)$.

以上证法显然亦可用于 2.3.4 中的 $f\pm g$ 与 f/g. 下面是一个稍复杂点的例子.

例 4 设 $f(x,t):X\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 对 x 可测，对 t 连续，$\varphi:X\to\mathbf{R}$ 可测，则 $g(x)=f(x,\varphi(x))$ 是 X 上的可测函数.

证 **1°** 设 $\varphi=\sum a_i\chi_{e_i}$，$e_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 X 中互不相交的可测集，$\bigcup e_i=X$. 因 $f(x,a_i)$ 在 X 上可测，故 g 在 $e_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 上可测，由此易推出 g 在 X 上可测.

2° 对一般的可测函数 φ，依 2.3.6 有序列 $\{\varphi_n\}\subset S(X)$，使

$\varphi_n \to \varphi$. 由 $f(x,t)$ 对 t 连续有

$$f(x,\varphi_n(x)) \to f(x,\varphi(x)) = g(x)(x \in X).$$

由已证的 1° 知 $f(x,\varphi_n(x))$ 可测，故 $g(x)$ 可测.

§2.4　可测函数列的收敛性

本节中设 $f, f_n(n=1,2,\cdots)$ 是 X 上几乎处处有限的可测函数. 实变函数论中要用到序列 $\{f_n\}$ 的多种收敛性，本节所考察的几种收敛性是最基本的，下面就是定义.

2.4.1 定义　(i) 若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \geqslant 1$，$\forall n \geqslant N$，$\forall x \in X$，有 $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$，则说 $\{f_n\}$ 在 X 上一致收敛于 f，记作 $f_n \rightrightarrows f$.

(ii) 若 $\forall \delta > 0$，$\exists X_\delta \subset X$，使得 $\mu X_\delta^c < \delta$，在 X_δ 上 $f_n \rightrightarrows f$，则说 $\{f_n\}$ 在 X 上几乎一致收敛①于 f，记作 $f_n \to f$, a. u..

(iii) 若 $\forall \sigma > 0$，有 $\mu X(|f_n - f| \geqslant \sigma) \to 0(n \to \infty)$，则说 $\{f_n\}$ 在 X 上依测度 μ 收敛(或就说测度收敛)于 f，记作 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

以上三种收敛强度不等，各有其用. 一致收敛无疑是很强的收敛，在一般情况下很难实现，因而其应用大受局限. 测度收敛似乎是很弱的收敛(当 μ 为概率测度时，它就是概率论中的"依概率收敛")，但实际上仍然蕴涵着足够多的信息. 运用测度论的方法，可以揭示出几种收敛之间的深刻内在联系. 以下是本节的中心结果.

2.4.2 定理　(i) 若 $f_n \to f$, a. u.，则 $f_n \to f$, a. e.；反之，若 $\mu X < \infty$，$f_n \to f$, a. e.，则 $f_n \to f$, a. u.(后者通常称为"Egorov 定理").

(ii) 若 $f_n \to f$, a. u.，则 $f_n \xrightarrow{\mu} f$；反之，若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，则 $\{f_n\}$ 有一子列几乎一致收敛于 f(后者通常称为"Riesz"定理).

(iii) 若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，则 $\{f_n\}$ 有子列几乎处处收敛于 f. 若 $\mu X < \infty$，

---

① 本于 Halmos[6]的这一术语并不完全通用. 不细心的读者很可能将它与"几乎处处收敛"相混. 或许正是这一耽心妨碍了"几乎一致收敛"一词的流行.

$f_n \to f$,a.e,则 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

证 直接看出(i)与(ii)一起推出(iii),且(i)与(ii)的前半部分容易证明.因此只需证(i)与(ii)的后半部分.以下设

$$X_n(\sigma) = X(|f_n - f| \geqslant \sigma),$$

假定使 $f_n - f$ 无定义的点(它们组成一零测集)也算在 $X_n(\sigma)$ 内.

1° 设 $\mu X < \infty$,$f_n \to f$,a.e.,今证 $f_n \to f$,a.u..因

$$\begin{aligned} f_n(x) \not\to f(x) &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{N}, \forall\, n \in \mathbf{N}, \exists\, i \geqslant n: \\ &\qquad |f_i(x) - f(x)| \geqslant 1/k \\ &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{N}: x \in \overline{\lim_n}\, X_n(1/k), \end{aligned}$$

故

$$X(f_n \not\to f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\lim_n}\, X_n(1/k).$$

因 $\mu X(f_n \not\to f) = 0$,故对每个 $k \in \mathbf{N}$ 有

$$\lim_n \mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} X_i\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \mu\left(\overline{\lim_n}\, X_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0 \tag{1}$$

(用 2.2.3(v),注意 $\mu X < \infty$!).取定 $\delta > 0$.由式(1),可依次取出 $n_1 < n_2 < \cdots$,使

$$\mu\left(\bigcup_{i=n_k}^{\infty} X_i\left(\frac{1}{k}\right)\right) < \frac{\delta}{2^k}\ (k \in \mathbf{N}). \tag{2}$$

令 $X_\delta = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=n_k}^{\infty} X_i\left(\frac{1}{k}\right)\right]^c$,则由(2)得

$$\begin{aligned} \mu X_\delta^c &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=n_k}^{\infty} X_i\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{i=n_k}^{\infty} X_i\left(\frac{1}{k}\right)\right) < \delta. \end{aligned}$$

由 X_δ 的定义看出,当 $x \in X_\delta, i \geqslant n_k$ 时

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/k\ (k = 1,2,\cdots),$$

可见在 X_δ 上 $f_n \rightrightarrows f$.因此 $f_n \to f$,a.u..

2° 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$,则 $\mu X_n(1/k) \to 0 (n \to \infty, k = 1,2,\cdots)$,于是可依次取出 $n_1 < n_2 < \cdots$,使得

$$\mu X_{n_k}(1/k) < 2^{-k},\ k = 1,2,\cdots. \tag{3}$$

今证 $f_{n_k} \to f$, a. u.. 取定 $\delta > 0$；取 $k_0 \in \mathbf{N}$，使 $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} < \delta$. 令

$$X_\delta = \left[\bigcup_{k=k_0}^{\infty} X_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right)\right]^c.$$

由(3)立得 $\mu X_\delta^c < \delta$. 从 X_δ 的定义看出

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}(x \in X_\delta, k \geqslant k_0),$$

这表明在 X_δ 上 $f_{n_k} \rightrightarrows f(k \to \infty)$. 因此 $f_{n_k} \to f$, a. u. □

例 1　设 $X = [0,1)$，$f_n(x) = x^n (n = 1,2,\cdots)$，则在 X 上 $f_n \to 0$. 但在 X 上 $\{f_n\}$ 非一致收敛. 事实上，

$$\lim_n f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

另一方面，$\forall\ \delta \in (0,1)$，在 $[0,1-\delta]$ 上显然有 $f_n \rightrightarrows 0$，因而 $f_n \to 0$, a. u.，正如 2.4.2(i) 所断言的一样.

还可以举出许多类似于例 1 的处处收敛但非一致收敛序列的例子，对它们一致收敛性只是在某个局部被破坏. Egorov 定理则指出了这是普遍规律.

例 2　设 $X = [0,\infty)$，$f_n = \chi_{[n,\infty)}$，则在 X 上 $f_n \to 0$. 因恒有 $mX(|f_n| \geqslant 1) = \infty$，故不可能有 $f_n \xrightarrow{m} 0$. 更不可能有 $f_n \to 0$, a. u.. 此例表明，2.4.2(i)、(iii) 中的条件"$\mu X < \infty$"不可去掉.

例 3　设 $X = [0,1]$，依次取

$$I_1 = [0,1/2],\ I_2 = [1/2,1],\ I_3 = [0,1/3],$$
$$I_4 = [1/3,2/3],\ I_5 = [2/3,1],\ I_6 = [0,1/4],$$
$$\vdots$$

令 $f_n = \chi_{I_n}(n = 1,2,\cdots)$. 直接看出 $mX(f_n > 0) \to 0$，因此 $f_n \xrightarrow{m} 0$ $(n \to \infty)$. 另一方面，$\forall\ x \in X$，显然有任意大的 n，使 $x \in I_n$，从而 $f_n(x) = 1$，故 $\{f_n\}$ 在 X 上处处不收敛于零. 此例表明，"测度收敛"可能远远弱于"几乎处处收敛". 因此，2.4.2(iii) 的前半部分不能加

强为“$f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow f_n \to f$,a.e.”.

2.4.2 是一个很深刻的定理,它揭示了一些表面观察难以确立的事实.例如,从表面上看,似乎“几乎一致收敛”应强于“几乎处处收敛”,但当 $\mu X < \infty$ 时,2.4.2 指出二者实际上互相等价!再如,当 $\mu X<\infty$ 时,尽管“测度收敛”一般远弱于“几乎处处收敛”,但由 2.4.2 可推出,$\{f_n\}$有子列测度收敛 $\Leftrightarrow$ $\{f_n\}$有子列几乎处处收敛(本章习题 35).这似乎是一个并不很强的结论,但若能适当地利用它所提供的信息,有时仍能有效地解决问题.下面就是这样的一个例子.

例 4 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f, g_n \xrightarrow{\mu} g, f_n \leqslant g_n$,a.e.$(n = 1,2,\cdots)$,则 $f \leqslant g$,a.e..

证 由 2.4.2,$\{f_n\}$有几乎处处收敛子列,不妨就设 $f_n \to f$,a.e.(否则只需改变下标记号).又取$\{g_n\}$的子列$\{g_{n_k}\}$,使 $g_{n_k} \to g$,a.e.. 其次亦有 $f_{n_k} \to f$,a.e.,于是由 $f_{n_k} \leqslant g_{n_k}$,a.e. 即推出 $f \leqslant g$,a.e..

应用例 4 可得出如下结论:若 $f_n \xrightarrow{\mu} f, f_n \xrightarrow{\mu} g$,则 $f \leqslant g$,a.e. 且 $g \leqslant f$,a.e.,从而 $f = g$,a.e.,即在几乎处处相等的意义下,测度收敛序列的极限函数是唯一的.

例 5 设 $\mu X < \infty, f_n \xrightarrow{\mu} f, g_n \xrightarrow{\mu} g$,则 $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg (n \to \infty)$.

证 若结论不真,则有 $\sigma, \varepsilon > 0, n_1 < n_2 < \cdots$,使得

$$\mu X(|f_{n_k} g_{n_k} - fg| \geqslant \sigma) \geqslant \varepsilon,\ k = 1,2,\cdots. \tag{4}$$

由 $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f(k \to \infty)$推出有子列 $f_{n_{k_i}} \to f$,a.e.$(i \to \infty)$;由 $g_{n_k} \xrightarrow{\mu} g$ 推出$\{g_{n_{k_i}}\}$有几乎处处收敛子列,为记号简便起见,不妨就设$g_{n_{k_i}} \to g$,a.e.$(i \to \infty)$.于是

$$f_{n_{k_i}} g_{n_{k_i}} \to fg,\text{a.e.}\ (i \to \infty). \tag{5}$$

由 2.4.2 (iii)(条件 $\mu X < \infty$ 用于此!),(5)推出 $f_{n_{k_i}} g_{n_{k_i}} \xrightarrow{\mu} fg$ $(i \to \infty)$,但这与式(4)矛盾.

现在利用 2.4.2 来研究用连续函数逼近可测函数的问题.为此需要以下引理.

2.4.3 引理 设 $F \subset \mathbf{R}^n$ 是一非闭空集，$f \in C(F)$，则存在 $g \in C(\mathbf{R}^n)$，使得 $g|F = f$，且 $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^n}|g(x)| = \sup\limits_{x \in F}|f(x)|$.

这是有名的的 Tietze 扩张定理的特殊情形，其证明放在下节.

2.4.4 Luzin 定理① 设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 为可测集，f 是 X 上几乎处处有限的可测函数，则成立以下结论：

(i) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists g \in C(\mathbf{R}^n)$，使 $mX(f \neq g) < \varepsilon$，且

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |g(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

(ii) 存在序列 $\{g_k\} \subset C(\mathbf{R}^n)$，使在 X 上 $g_k \to f$，a.e. $(k \to \infty)$.

证 以下设 $\varepsilon > 0$ 是取定的.

1° 设 $f = \sum a_i \chi_{e_i}$，$e_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 是互不相交的可测集，$X = \bigcup e_i$. 取闭集 $F_i \subset e_i$，使 $m(e_i \backslash F_i) < \varepsilon/k (1 \leqslant i \leqslant k)$. 令 $F = \bigcup F_i$，则 F 是闭集，$F \subset X$，且

$$m(X \backslash F) = \sum_i m(e_i \backslash F_i) < \varepsilon.$$

因 f 在每个 F_i 上是常数，而 $F_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 互不相交，故 $f|F$ 连续（参考 §1.5 例 2）.

2° 设 $mX < \infty$. 由 2.3.6，有序列 $\{\varphi_k\} \subset S(X)$，使 $\varphi_k \to f (k \to \infty)$. 由上段所证，$\forall k \geqslant 1$，有闭集 $F_k \subset X$，使 $m(X \backslash F_k) \leqslant \varepsilon 2^{-k-1}$，且 $\varphi_k | F_k$ 连续. 令 $F_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$，则

$$m(X \backslash F_0) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \backslash F_k)\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(X \backslash F_k) < \varepsilon/2,$$

且每个 $\varphi_k | F_0$ 连续 $(k = 1, 2, \cdots)$. 因在 F_0 上 $\varphi_k \to f$ 且 $mF_0 < \infty$，故由 2.4.2(i) 有 $F \subset F_0$，使 $m(F_0 \backslash F) < \varepsilon/2$，在 F 上 $\varphi_k \rightrightarrows f$，因而 $f|F$ 连续（请证之！）. 其次有

$$m(X \backslash F) = m(X \backslash F_0) + m(F_0 \backslash F) < \varepsilon.$$

---

① 第一次阅读时可略去 Luzin 定理的证明，但应熟悉其结论.

由 2.1.5(i)①，可设 F 是闭集(否则以 F 的适当闭子集取代 F)。

3° 令 $X_k = \{x \in X: k-1 \leqslant |x| < k\}(k = 1,2,\cdots)$. 由上段所证，$\forall k \geqslant 1$，有闭集 $F_k \subset X_k$，使 $m(X_k \backslash F_k) < \varepsilon 2^{-k}$，且 $f|F_k$ 连续. 令 $F = \bigcup F_k$. 若 $\{x^{(j)}\} \subset F$，$x^{(j)} \to x(j \to \infty)$，则因每个 $B_r(x)$ $(r > 0)$ 仅与有限个 F_k 相交，不妨设某个 F_k 包含 $\{x^{(j)}\}$，因此 $x \in F_k$ 且 $f(x^{(j)}) \to f(x)$. 故 F 是闭集且 $f|F$ 连续. 其次，

$$m(X \backslash F) = \sum_{k=1}^{\infty} (X_k \backslash F_k) < \varepsilon.$$

4° 设 F 如上段所得之集. 由 2.4.3，有 $g \in C(\mathbf{R}^n)$，使 $g|F = f|F$，且

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |g(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)|;$$

$$mX(g \neq f) \leqslant m(X \backslash F) < \varepsilon.$$

于是定理之结论(i)得证.

5° 由已证之(i)，$\forall k \in \mathbf{N}$，$\exists g_k \in C(\mathbf{R}^n)$，使得 $mX(f \neq g_k) < 2^{-k}$. 令 $A = \overline{\lim_k} X(f \neq g_k)$，则

$$mA = \lim_k m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} X(f \neq g_i)\right)$$

$$\leqslant \lim_k \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = 0,$$

可见 $mA = 0$. 因 $X \backslash A = \underline{\lim_k} X(f = g_k)$，且直接看出在 $X \backslash A$ 上 $g_k \to f$，故 $g_k \to f$，a.e. $(k \to \infty)$. 于是定理之结论(ii)得证. □

如果说，2.3.6 表明了可测函数其实接近于简单函数，那么，2.4.4 则表明，在一定意义上，$\mathbf{R}^n$ 上的可测函数实际上很接近于连续函数. 准确地说就是：

2.4.5 推论 设 f 是可测集 $X \subset \mathbf{R}^n$ 上几乎处处有限的实函数，则 f 可测的充要条件是存在序列 $\{g_k\} \subset C(X)$，使得

$$g_k \to f, \text{a.e.}\ (k \to \infty).$$

① 严格地说，此处是用 2.1.5 的 n 维推广.

* § 2.5 某些结论的证明及补充

为证基本的定理 2.1.1，首先引进某些一般概念，并建立相应的结果，它们都有独立的价值.

为深入研究测度，需要考虑具各种性质的集函数. 关于集函数的一些用语已高度标准化，其主要者综合于下.

2.5.1 定义 设 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是一非空集族，μ： $\mathscr{A}\to\overline{\mathbf{R}}$ 是一集函数.

(i) 若 $\forall A,B\in\mathscr{A}$：$A\subset B\Rightarrow \mu A\leqslant\mu B$，则说 μ 是单调的.

(ii) 若当 $A,A_n\in\mathscr{A}\,(n=1,2,\cdots)$，$A=\bigcup A_n$ 且 A_n 互不相交时 $\mu A=\sum\mu A_n$，则说 μ 是 σ-可加或完全可加的；若当 $A,B\in\mathscr{A}$，$A\cap B=\varnothing$ 时 $\mu(A\cup B)=\mu A+\mu B$，则说 μ 是有限可加的.

(iii) 若当 $A,A_n\in\mathscr{A}\,(n=1,2,\cdots)$ 且 $A=\bigcup A_n$ 时 $\mu A\leqslant\sum\mu A_n$，则说 μ 是次可加的.

注意，若 μ 是 σ-可加的，$\varnothing\in\mathscr{A}$ 且 $\mu\varnothing=0$，则 μ 必是有限可加的. 因此通常将有限可加性隐含于 σ-可加性中(参考 2.1.1 之后的说明).

下面推广 2.2.1 中的概念.

2.5.2 定义 (i) 若非空集族 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 满足条件

$$A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cup B,A\backslash B\in\mathscr{A}, \tag{1}$$

则称 $\mathscr{A}$ 为环或集环；当 $X\in\mathscr{A}$ 时称环 $\mathscr{A}$ 为代数.

(ii) 若 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是一个环，μ： $\mathscr{A}\to[0,\infty]$是一个 σ-可加集函数且 $\mu\varnothing=0$，则称 μ 为环 $\mathscr{A}$ 上的测度.

(iii) 若 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是一个 σ-代数，μ^*： $\mathscr{A}\to[0,\infty]$ 是一个单调、次可加集函数且 $\mu^*\varnothing=0$，则称 μ^* 为 $\mathscr{A}$ 上的外测度，当 $\mathscr{A}=2^X$时称 μ^* 为 X 上的外测度.

"环上测度"与外测度都可用来构造测度.简单地说,环上测度可通过扩大定义域而扩张为一个测度;外测度可通过缩小定义域而限制为一个测度.后一断语包含在以下定理中.

2.5.3 定理 设 μ^* 是 X 上的一个外测度,$\mathscr{M}$ 是满足条件

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B) \ (\forall A \subset X) \tag{2}$$

的集 $B \subset X$ 之全体,则 μ^* 在 $\mathscr{M}$ 上的限制 $\mu^* | \mathscr{M}$(参考 1.2.3)是一完备测度.

注 条件(2)称为 **Caratheodory 条件**.因 $\mu^* A \leqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B)$ 恒成立,故条件(2) $\Leftrightarrow \mu^* A \geqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B)$ $(\forall A \subset X)$.

证 **1°** 证 $\mathscr{M}$ 是一代数.显然 $X, \varnothing \in \mathscr{M}$.若 $B_1, B_2 \in \mathscr{M}$,$A \subset X$,则反复应用条件(2)得出:

$$\begin{aligned}
\mu^* A &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \backslash B_1) \\
&= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\
&= [\mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c)] \\
&\qquad + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\
&= \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^*(A \backslash (B_1 \cup B_2));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu^* A &= \mu^*(A \cap B_1 \cap B_2^c) + \mu^*(A \cap B_1 \cap B_2) + \mu^*(A \backslash B_1) \\
&= \mu^*(A \cap B_1 \cap B_2^c) + [\mu^*(A \cap (B_1 \backslash B_2)^c \cap B_1) \\
&\qquad + \mu^*(A \cap (B_1 \backslash B_2)^c \cap B_1^c)] \\
&= \mu^*(A \cap (B_1 \backslash B_2)) + \mu^*(A \backslash (B_1 \backslash B_2)),
\end{aligned}$$

可见 $B_1 \cup B_2, B_1 \backslash B_2 \in \mathscr{M}$,即 $\mathscr{M}$ 满足条件(1),因而 μ 为代数.

2° 证 μ^* 在 $\mathscr{M}$ 上有限可加.设 $B_1, B_2 \in \mathscr{M}$,$B_1 \cap B_2 = \varnothing$,$B = B_1 \cup B_2$,则对任给 $A \subset X$ 有

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap B) &= \mu^*(A \cap B \cap B_1) + \mu^*(A \cap B \cap B_1^c) \\
&= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_2).
\end{aligned}$$

进而归纳地得出:若 $B_i \in \mathscr{M} (1 \leqslant i \leqslant n)$ 互不相交,则

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_i B_i)) = \sum_i \mu^*(A \cap B_i) \ (\forall A \subset X). \tag{3}$$

在(3)中取 $A = X$ 得出 $\mu^*(\bigcup B_i) = \sum \mu^* B_i$.

3°　证 $\mathscr{M}$ 为 σ-代数且 $\mu^*|\mathscr{M}$ 为测度. 设 $B_n \in \mathscr{M}(n = 1,2,\cdots)$互不相交,$B = \bigcup B_n$. 令 $C_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$,则对任给 $A \subset X$ 有:

$$
\begin{aligned}
\mu^* A &\leqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B) \\
&\leqslant \sum_n \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \backslash B) \\
&\leqslant \varliminf_n \Big[\sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \backslash C_n)\Big] \\
&= \mu^*(A \cap C_n) + \mu^*(A \backslash C_n) = \mu^* A, \quad (\text{用}(3)) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

这推出 $\mu^* A = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B)$,因此 $B \in \mathscr{M}$. 在(4)式中取 $A = B$ 得出 $\mu^* B = \sum \mu^* B_n$,故 $\mu^*|\mathscr{M}$ 是 σ-可加的. 若 $B_n \in \mathscr{M}$ $(n = 1,2,\cdots)$不必互不相交,则由

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \cup \Big[\bigcup_{n=2}^{\infty}\Big(B_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\Big)\Big]$$

看出 $\bigcup B_n \in \mathscr{M}$. 因此 $\mathscr{M}$ 是 σ-代数,从而 $\mu^*|\mathscr{M}$ 是测度.

4°　证完备性. 设 $B \subset N \in \mathscr{M}$,$\mu^* N = 0$,则

$$
\begin{aligned}
\mu^* A &\leqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \backslash B) \\
&\leqslant \mu^* N + \mu^* A = \mu^* A \ (\forall A \subset X),
\end{aligned}
$$

这推出式(2),因此 $B \in \mathscr{M}$. 故 $\mu^*|\mathscr{M}$ 完备. □

今后将称 $\mathscr{M}$($\mathscr{M}$ 依 2.5.3)中的集为 **μ^*-可测集**.

2.1.1 之证　下面以 F,F_n 记闭集,G,G_n 记开集.

1°　定义开集测度. 设 $G = \bigcup \delta_k$,$\delta_k = (a_k, b_k)$是 G 的构成区间,则规定 G 的测度 mG 为

$$mG = \sum_k (b_k - a_k).$$

约定 $m\varnothing = 0$. 开集测度有以下性质:

$$G_1 \subset G_2 \Rightarrow mG_1 \leqslant mG_2; \qquad (5)$$

$$m\Big(\bigcup_k G_n\Big) \leqslant \sum_k mG_n, \qquad (6)$$

当 $G_n(n = 1,2,\cdots)$互不相交时(6)为等式. (5)是明显的. 为证(6),

以 Δ_i 记 $G = \bigcup G_n$ 的构成区间，以 δ_{nk} 记 G_n的构成区间. 则每个 δ_{nk} 必含于某个 Δ_i(第一章习题 32)，且 Δ_i 是它所包含的所有 δ_{nk}之并，于是

$$\begin{aligned} mG &= \sum_i m\Delta_i \leqslant \sum_i \sum_{\delta_{nk}\subset \Delta_i} m\delta_{nk} \\ &= \sum_{n,k} m\delta_{nk} = \sum_n \sum_k m\delta_{nk} \\ &= \sum_n mG_n, \end{aligned}$$

其中用到关键的不等式

$$m\Delta_i \leqslant \sum_{\delta_{nk}\subset \Delta_i} m\delta_{nk}. \tag{7}$$

证(7)又归于证：若 Δ 为开区间，$\{\delta_j\}$是一列开区间，$\Delta = \bigcup \delta_j$，则 $m\Delta \leqslant \sum m\delta_j$. 任取 $[a,b] \subset \Delta$，则由有限覆盖定理有 $J > 0$，使 $[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^J \delta_j$，于是 $b - a \leqslant \sum_{j=1}^J m\delta_j$. 分别令 a,b 趋于 Δ 的两个端点，即得 $m\Delta \leqslant \sum m\delta_j$.

2° 定义外测度. 任给 $A \subset \mathbf{R}$，令

$$m^* A = \inf_{A\subset G} mG. \tag{8}$$

显然 $m^*\varnothing = 0$；$A \subset B \subset \mathbf{R} \Rightarrow m^* A \leqslant m^* B$. 设 $A_n \subset \mathbf{R}$，$m^* A_n < \infty (n = 1,2,\cdots)$. $\forall\ \varepsilon > 0$，取 $G_n \supset A_n$，使 $mG_n < m^* A_n + \varepsilon 2^{-n} (n = 1,2,\cdots)$，则由(8)，(6)有

$$\begin{aligned} m^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) &\leqslant m(\bigcup_{n=1}^\infty G_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty mG_n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty m^* A_n + \varepsilon. \end{aligned}$$

这得出 $m^*(\bigcup A_n) \leqslant \sum m^* A_n$. 当某个 $m^* A_n = \infty$ 时此不等式自动成立. 因此 m^* 是 $\mathbf{R}$ 上的外测度. 直接由(8)看出，对于开集 G 有 $m^* G = mG$.

由 2.5.3，m^*-可测集之全体构成一 σ-代数 $\mathscr{L}$，m^* 在 $\mathscr{L}$ 上的限

制是一完备测度，下面仍记作 m. 只需验证 $\mathscr{L}$，m 具有 2.1.1 中的性质($\mathbf{P}_4$)，($\mathbf{Q}_4$)～($\mathbf{Q}_6$).

3°　验证($\mathbf{P}_4$). 只需对任何 $\Delta=(a,b)(-\infty<a<b<\infty)$证 $\Delta\in\mathscr{L}$. 为此只要对任给 $A\subset\mathbf{R}$，$G\supset A$ 证

$$m^*(A\cap\Delta)+m^*(A\setminus\Delta)\leqslant mG$$

(何故?). 直接看出 $m^*\{a,b\}=0$. 令 $J=[a,b]$，则

$$\begin{aligned}&m^*(A\cap\Delta)+m^*(A\setminus\Delta)\\ \leqslant\ &m^*(G\cap\Delta)+m^*((G\setminus J)\cup\{a,b\})\\ \leqslant\ &m(G\cap\Delta)+m(G\setminus J)\leqslant mG.\end{aligned}$$

($\mathbf{Q}_4$)显然被满足.

4°　验证($\mathbf{Q}_5$). 设 $B\in\mathscr{L}$，$x\in\mathbf{R}$. 若 B 是开集，则显然 $B+x$ 是开集且 $m(B+x)=mB$. 由此又推出 m^* 是平移不变的. 任给 $A\subset\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}m^*A&=m^*(A-x)\\ &=m^*((A-x)\cap B)+m^*((A-x)\setminus B)\\ &=m^*(A\cap(B+x))+m^*(A\setminus(B+x)),\end{aligned}$$

可见 $B+x\in\mathscr{L}$，且

$$m(B+x)=m^*(B+x)=m^*B=mB.$$

5°　验证($\mathbf{Q}_6$). 任给 $A\in\mathscr{L}$，$\varepsilon>0$. 令 $A_n=A\cap(-n,n)$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $A=\bigcup A_n$. 取 $G_n\supset A_n$，使 $mG_n<mA_n+\varepsilon2^{-n-1}(n=1,2,\cdots)$，令 $G=\bigcup G_n$，则 $G\supset A$，

$$m(G\setminus A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(G_n\setminus A_n)<\varepsilon/2.$$

同理有 $G_1\supset A^c$，使 $m(G_1\setminus A^c)<\varepsilon/2$. 令 $F=G_1^c$，则 $F\subset A\subset G$，

$$m(G\setminus F)=m(G\setminus A)+m(G_1\setminus A^c)<\varepsilon.\qquad\square$$

这样，我们已完成 1 维 Lebesgue 测度的构造. 上述过程的基本思路可概括为：首先在一较小的集族 $\mathscr{A}$(如开集族)上定义某种"测度"；然后将其扩张为 $\mathbf{R}$ 上的外测度 m^*；再将 m^* 限制到某个包含

$\mathscr{A}$ 的 σ-代数 $\mathscr{L}$ 上，得出所要求的测度 m. 以上思想还可以稍不同的方式加以发挥，得出如下一般结果：

2.5.4 定理 设 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是一个环，X 可表为 $\mathscr{A}$ 中可数个集的并，μ 是环 $\mathscr{A}$ 上的测度. 任给 $A\subset X$，令

$$\mu^* A = \inf\left\{\sum \mu A_n:\ \{A_n\}\subset\mathscr{A}, A\subset\bigcup A_n\right\}. \qquad (9)$$

则 μ^* 是 X 上的外测度（称为由 μ 导出的外测度）. 设 $\mathscr{M}$ 是 μ^*-可测集之全体，则 $\mu^*|\mathscr{M}$ 是 μ 的扩张，即 $\forall\, B\in\mathscr{A}$，有 $B\in\mathscr{M}$ 且 $\mu^* B = \mu B$.

证 1° 证 μ^* 为外测度. 只需验证次可加性. 设 $A_n\subset X(n=1,2,\cdots)$，$A=\bigcup A_n$，可设 $\mu^* A_n<\infty(n=1,2,\cdots)$. $\forall\,\varepsilon>0, n\in\mathbf{N}$，取 $\{A_{ni}:\ i\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{A}$，使 $A_n\subset\bigcup\limits_i A_{ni}$，且 $\sum\limits_i\mu A_{ni}<\mu^* A_n+\varepsilon 2^{-n}$，则 $A\subset\bigcup\limits_{n,i}A_{ni}$，于是

$$\begin{aligned}\mu^* A &\leqslant \sum_{n,i}\mu A_{ni} = \sum_n\sum_i\mu A_{ni}\\ &< \sum_n(\mu^* A_n+\varepsilon 2^{-n})\\ &= \sum_n\mu^* A_n+\varepsilon.\end{aligned}$$

由此得出 $\mu^* A\leqslant\sum\mu^* A_n$.

2° 证 $\mu^*|\mathscr{M}$ 是 μ 的扩张. 取定 $B\in\mathscr{A}$. 任给 $A\subset X$，首先设 $\mu^* A<\infty$. $\forall\,\varepsilon>0$，取序列 $\{A_n\}\subset\mathscr{A}$，使 $A\subset\bigcup A_n$ 且 $\sum\mu A_n<\mu^* A+\varepsilon$，则

$$\begin{aligned}\mu^* A+\varepsilon &> \sum_n\mu A_n\\ &= \sum_n[\mu(A_n\cap B)+\mu(A_n\backslash B)]\\ &= \sum_n\mu(A_n\cap B)+\sum_n\mu(A_n\backslash B)\\ &\geqslant \mu^*(A\cap B)+\mu^*(A\backslash B), \qquad (\text{用}(9))\end{aligned}$$

由此得 $\mu^*A=\mu^*(A\cap B)+\mu^*(A\setminus B)$. 当 $\mu^*A=\infty$时此式自然成立. 因此 $B\in\mathscr{M}$. 显然 $\mu^*B\leqslant\mu B$. 若$\{A_n\}\subset\mathscr{A}$,$B\subset\bigcup A_n$,不妨设 A_n 互不相交(否则以 $A_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i$代 A_n),则

$$\mu B=\sum_n\mu(B\cap A_n)\leqslant\sum_n\mu A_n,$$

这推出 $\mu B\leqslant\mu^*B$. 因此 $\mu B=\mu^*B$. □

2.5.5 定义 设 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是一非空集族. X 上包含 $\mathscr{A}$ 的所有 σ-代数的交是一个 σ-代数,称它为由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-代数.

为说明以上定义合理,必须指明两点:

1° 至少存在一个包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-代数,2^X 便是.

2° 若 $\mathscr{B}$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的所有 σ-代数之交,则 $\mathscr{B}$ 确为 σ-代数. 证明是直接的.

显然,$\mathscr{A}$ 所生成的 σ-代数即是包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ-代数. 若以 $\mathscr{T}$ 记 $\mathbf{R}^n$ 中开集之全体,则 $\mathscr{T}$ 生成一个 σ-代数 $\mathscr{B}$,称每个 $B\in\mathscr{B}$为 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集.

以上所述可自然地推广到由集族生成环或代数的概念.

结合 2.5.4 与 2.5.5 易得出:

2.5.6 定理 设 μ^*,$\mathscr{A}$,$\mathscr{M}$ 如 2.5.4,$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-代数,则有以下结论:

(i) $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}\subset\mathscr{M}$;

(ii) $\forall A\subset X$,$\exists B\in\mathscr{B}$:$A\subset B$ 且 $\mu^*A=\mu^*B$;

(iii) 若 μ 是有限的,则 $A\in\mathscr{M}\Leftrightarrow\exists B\in\mathscr{B}$,使得 $A\subset B$ 且 $\mu^*(B\setminus A)=0$,此时 $\mu^*A=\mu^*B$.

因此可以说,2.5.6 中的 μ^*,$\mathscr{B}$,$\mathscr{M}$ 分别类似于 m^*,Borel 集类 $\mathscr{B}$ 与 Lebesgue 可测集类 $\mathscr{L}$.

2.5.4 可用来构造 n 维 Lebesgue 测度,其大意如下:

1° 对每个 n 维半开方体 $C=\prod[a_i,b_i)$,定义

$$mC=\prod(b_i-a_i).$$

2° 以 $\mathscr{C}$ 记 n 维半开方体之全体，以 $\mathscr{A}$ 记 $\mathscr{C}$ 中集的有限并之全体，则 $\mathscr{A}$ 是一个环. 任给 $A\in\mathscr{A}$，必有有限个互不相交的 $C_i\in\mathscr{C}$，使 $A=\bigcup C_i$，定义 $mA=\sum mC_i$，则 m 是环 $\mathscr{A}$ 上的一个测度.

3° 应用 2.5.4，m 导出 $\mathbf{R}^n$ 上一个外测度 m^*，且 m^* 可测集构成一个 σ-代数 $\mathscr{L}$（相当于 2.5.4 中的 $\mathscr{M}$），m^* 在 $\mathscr{L}$ 上的限制是一个完备测度，它就是 n 维 Lebesgue 测度 m.

4° 由 2.5.6，$\mathscr{L}$ 包含 Borel 集类 $\mathscr{B}$；$A\in\mathscr{L}\Leftrightarrow\exists\, B\in\mathscr{B}$：$A\subset B$ 且 $m(B\backslash A)=0$.

进而可验证 m 具有 2.1.6 中的所有性质. 以上过程不可避免地包含某些繁琐细节，欲知其详的读者可参看有关文献（如 [8,12～16]）.

到此为止，还没有涉及到一个非 Lebesgue 可测集. 这不是偶然的. 因为根本不存在这种不可测集的平凡例子. 为了得到一个不可测集，必定要用到某种非常规的构造.

2.5.7 定理 设 $E\subset\mathbf{R}$，$mE>0$，则存在 $A\subset E$，$m^*A>0$，且 A 是 Lebesgue 不可测集.

证 可设 E 有界（否则以某个 $E\cap(-n,n)$ 代替 E，n 足够大），取区间 $[a,b]\supset E$. 任给 $x,y\in E$，当 $x-y\in\mathbf{Q}$ 时将 x,y 归于同一类. 这样，E 被分成互不相交的类. 从每类中选出一元构成一集 A，今证 A 即合于定理所求. 令 $A_r=A+r$. 若 $r,s\in\mathbf{Q}$，$r\neq s$，则必 $A_r\cap A_s=\varnothing$（否则有 $a,b\in A$，使 $a+r=b+s$，从而 $a-b=s-r\in\mathbf{Q}$，这推出 $a=b$，$s=r$！）. 因 $\forall\, x\in E$，$\exists\, a\in A$，使 $x-a\in\mathbf{Q}$，故 $E\subset\bigcup\limits_{r\in\mathbf{Q}}A_r$. 于是（注意 m^* 平移不变）

$$
\begin{aligned}
0<mE&\leqslant m^*\Big(\bigcup_{r\in\mathbf{Q}}A_r\Big)\\
&\leqslant\sum_{r\in\mathbf{Q}}m^*A_r=m^*A+m^*A+\cdots,
\end{aligned}
$$

这表明 $m^*A>0$. 令 $B=\mathbf{Q}\cap[0,1]$，则 $\forall\, r\in B$：$A_r\subset[a,b+1]$. 若 A 可测，则

$$b-a+1=m[a,b+1]\geqslant m(\bigcup_{r\in B}A_r)$$
$$=\sum_{r\in B}mA_r=mA+mA+\cdots,$$

这表明 $mA=m^*A=0$，得出矛盾．故 A 不可测． □

现在转向 2.4.3 之证，为此需要如下引理：

2.5.8 引理　设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$ 是两个互不相交的非空闭集，$-\infty<a<b<\infty$，则存在 $f\in C(\mathbf{R}^n)$，使得 $a\leqslant f\leqslant b$，且 $f|A=a$，$f|B=b$，即对任给 $x\in A$，$y\in B$ 有 $f(x)=a$，$f(y)=b$．

证　直接验证以下函数即合要求：

$$f(x)=\frac{ad(x,B)+bd(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},\ x\in\mathbf{R}^n, \tag{10}$$

其中 $d(x,A)$ 表点 x 到集 A 的距离（见§1.4(2)），它显然对 x 连续，且 $d(x,A)=0\Leftrightarrow x\in A$． □

2.4.3 之证　为记号简便起见，约定

$$\|f\|_F=\sup_{x\in F}|f(x)|,\quad \|g\|=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|g(x)|.$$

1°　设 $\|f\|_F\leqslant 1$．令 $A_\pm=f^{-1}([\pm 1/3,\pm 1])$，由 1.5.6，$A_+$ 与 A_- 是互不相交的闭集．由 2.5.8，有 $g_1\in C(\mathbf{R}^n)$，使 $g_1|A_\pm=\pm 1/3$，$\|g_1\|=1/3$，于是 $\|f-g_1\|_F\leqslant 2/3$．设已作出 $g_i\in C(\mathbf{R}^n)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 使得

$$\|g_i\|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}(1\leqslant i\leqslant k);$$

$$\left\|f-\sum_{i=1}^k g_i\right\|_F\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

令

$$\varphi=\left(\frac{3}{2}\right)^k\left(f-\sum_{i=1}^k g_i\right),$$

则 $\varphi\in C(F)$，$\|\varphi\|_F\leqslant 1$．以 φ 代 f 用已证结论知有 $g_{k+1}^*\in C(\mathbf{R}^n)$，使得 $\|g_{k+1}^*\|\leqslant 1/3$，$\|\varphi-g_{k+1}^*\|_F\leqslant 2/3$．令 $g_{k+1}=(2/3)^k g_{k+1}^*$，则

$$\|g_{k+1}\|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k,\quad \left\|f-\sum_{i=1}^{k+1}g_i\right\|_F\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}. \tag{11}$$

这就归纳地作出序列$\{g_k\}\subset C(\mathbf{R}^n)$，使得(11)对$k=0,1,2,\cdots$满足. 令$g=\sum_{k=1}^{\infty}g_k$，则$g\in C(\mathbf{R}^n)$，

$$\|g\|\leqslant 1,\ g|F=f. \tag{12}$$

2° 设$0<\|f\|_F<\infty$($\|f\|_F=0$的情况显然不必考虑). 以$\varphi=f/\|f\|_F$代f应用已证的1°，得出$h\in C(\mathbf{R}^n)$，使得$\|h\|=1$，$h|F=\varphi$. 令$g=\|f\|_Fh$，则$\|g\|=\|f\|_F$，$g|F=f$.

3° 设$\|f\|_F=\infty$，令$\varphi(x)=\dfrac{2}{\pi}\arctan x$，则$\varphi\circ f\in C(F)$，$\|\varphi\circ f\|_F=1$. 于是有$h\in C(\mathbf{R}^n)$，使$\|h\|=1$，$h|F=\varphi\circ f$. 因$B=\{x\in\mathbf{R}^n:|h(x)|=1\}$是闭集，$B\cap F=\varnothing$，由2.5.8有$\psi\in C(\mathbf{R}^n)$，使$\psi|B=0$，$\psi|F=1$，$0\leqslant\psi\leqslant 1$. 令

$$g(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}\psi(x)h(x)\right),$$

则$g\in C(\mathbf{R}^n)$，$g|F=f$. □

评 注

1. 测度概念的形成，是为拓广长度、面积与体积概念所进行的一系列探索的结果. 19世纪下半叶，不少分析学家试探过扩充长度与面积概念，其中包括Cantor，Stolz，Peano，Jordan，Borel这样一些大名鼎鼎的人物. 他们大都认为"容量"是一个合适的概念，应用容量可度量愈来愈复杂的点集. Jordan使容量理论趋于完善，尤其使"有限可加性"得到证明. Borel对Jordan的容量理论作了实质性改进，使之更接近于现代的测度理论. 决定性的推进是由Borel的学生H. Lebesgue(1875—1941)作出的. Lebesgue在Borel及其他人工作的基础上，系统地建立了测度论，并用来成功地建立起他的积分理论. 他发表于1902年的论文《积分、长度与面积》被公认为现代测度与积分理论的奠基之作. 其后十多年，Lebesgue的理论被许多数学家向各个方向推进. 1910年，Lebesgue研究了R^n中的测度；1913年，

Randon 展开了今天称之为正则 Borel 测度的理论；1915 年，Fréchet 提出在一般 σ-代数上建立测度，抽象测度理论由此诞生. Caratheodory(1873—1950)，Hahn 等人的工作给予一般测度理论以很大推动.

2. 希腊数学家 Caratheodory 在本世纪 20 年代前后关于外测度的工作，对于现代形式的测度理论的形成起了关键作用. Caratheodory 所给出的可测性条件(参见 § 2.5(2))初看起来是不自然的，但事实证明它是迄今为止最简捷的可测集导入法. Lebesgue 当初首先引入外测度 m^* 与内测度 m_*，然后通过条件 $m_*A = m^*A$ 定义可测集，这无疑是直观上最容易被接受的方法. 但循这一路线的理论并不是最简洁的，而且缺少推广的价值，因而被 Caratheodory 的导入法所取代.

3. 在 Lebesgue 可测的意义上，可测集与可测函数广泛到这样的地步，以至在实际问题中可测性要求几乎不构成任何限制. 迄今所知的不可测集都如 2.5.7 中的例子那样矫揉造作，很难想象它们会出现在"平常地"思考所提出的问题中. Solovay 于 1970 年证明了：Lebesgue 不可测集的构成必定依赖于选择公理. 这就更加坚定了大多数分析学家的看法：Lebesgue 可测集是足够用的. 有鉴于此，在某个分析问题的研究起点处，假定所涉及的集与函数均可测是很自然的. 当然，这并不能自动地保证：在研究过程中出现的集与函数也都是可测的. 因此，经常不免遇到判定可测性的问题. 不过，本章中为此而设的 2.2.1，2.2.2，2.3.2～2.3.4，2.4.5 等结果通常是够用的.

4. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一测度空间，$\mu X > 0$. 因零测集的可数并仍为零测集，故从 X 中除去任意**可数个**零测集之后，余下的集具有不变的正测度. 因此可以说，零测集在 X 中可忽略不计. 这就得到刻画"稀有性"的又一种方法. 与上章提及的基于"可数性"与"第一纲性"的方法比较，此处所说的测度论方法似乎更加"精确". 测度毕竟是对集合的一种"量度"，它具有更多的定量色彩. 正因为如此，利用零测集定义的"几乎处处"概念(2.2.5)才获得如此广泛而有效的应

用、有趣的是，描述“稀有性”的以上三种方法可以在测度论的框架内统一起来(参看本章习题 16).

5. 本章并没有举多少计算测度的例子.读者想必甚感忧虑：倘没有计算测度的有效方法，测度理论无论如何美妙，岂不空泛无用？这种担心看似自然，其实并无必要. 首先，本章的 2.1.3~2.1.5，2.2.3 等原则上为计算测度提供了方法，尽管具体施行并不容易. 其次，读者须知，测度概念涵盖了长度、面积、体积等概念. 因此，对于某个 $A\subset\mathbf{R}^n$，如果我们能计算它的“n 维体积”(当 $n\leqslant 3$ 时，初等积分学提供了有效方法)，那么也就求得了 Lebesgue 测度 mA. 在理论问题中，很少需要去准确算出某个集合的测度. 更重要的问题往往是判定某个集合是否为零测集，而为达此目的，本章的结论(如测度的单调性、σ-可加性、次可加性等)通常是够用的. 经验表明，在测度论的实际应用中，对所涉及的测度作出某种估计，常常比算出测度的具体数值更重要. 因此，缺少计算测度的普遍有效的方法，并不如初看起来那么严重.

6. 测度收敛是匈牙利数学家 Riesz(1880—1956)引进的，它是一种典型的“整体收敛性”，与传统的“按点收敛”差别甚大(回顾 § 2.4 例 3)，是很自然的. 分析学家热衷于引进愈来愈弱的收敛性，理由在于：即使很弱的收敛，所能传递的信息对于某些目的也是够用的，这就可能大大放宽某些问题的条件. 在 § 2.4 中，我们尽力注意到发掘“测度收敛”所蕴涵的信息，这是值得读者细加体会的. 如果读者能认真完成本章后面的相关习题(如题 31，35，36 等)，对此将会有更深入的认识.

习 题 A

1. 作完备疏集 $F\subset[0,1]$，使得 $mF=1/2$.

2. 作闭集 $F\subset\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$，使得 $mF>0$.

3. 设 $A\subset\mathbf{R}$，$mA<\infty$，$\varepsilon>0$，则存在有限个开区间 δ_i，使得

$$m(A\Delta(\bigcup_i \delta_i)) < \varepsilon.$$

4. 设 $A \subset \mathbf{R}$ 可测，$a \in \mathbf{R}$，$\delta > 0$，当 $|x| < \delta$ 时 $a + x$ 与 $a - x$ 至少一个属于 A，则 $mA \geqslant \delta$.

5. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$，若 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subset A$ 与开集 $G \supset A$，使 $m(G\setminus F) < \varepsilon$，则 A 可测.

6. 设 $A, G \subset \mathbf{R}^n$，$mA = 0$，$G$ 为开集，则 $G = \overline{G\setminus A}$.

7. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$ 可测，$0 \leqslant a \leqslant mA$，则 $\exists\, B \subset A$：$mB = a$.

8. $\mathbf{R}^{n-1}$ 当作 $\mathbf{R}^n$ 的子集，其 n 维 Lebesgue 测度为零.

9. 直线上恰有 2^c 个 Lebesgue 可测集.

10. 设 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 μ-可测集（μ 是 X 上的测度，下同），则 $\mu(\varliminf_n A_n) \leqslant \varliminf_n \mu A_n$；当 $\mu(\bigcup A_n) < \infty$ 时 $\mu(\varlimsup_n A_n) \geqslant \varlimsup_n \mu A_n$.

11. 设 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 μ-可测集，$\mu(\bigcup A_n) < \infty$，$A = \lim_n A_n$，则 $\mu A = \lim_n \mu A_n$.

12. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n < \infty$，则 $\mu(\varlimsup_n A_n) = 0$.

13. 设 $\mu X = \mu A_n = 1$，$A_n \subset X (n = 1, 2, \cdots)$，则 $\mu(\bigcap A_n) = 1$.

14. 设 $\mu X = 1$，$\mu A_n \to 1 (n \to \infty)$，则有子列 $\{A_{n_i}\}$ 使 $\mu(\bigcap_i A_{n_i}) > 0$.

15. 设 $\mu X = 1$，$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i > n - 1$，则 $\mu(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) > 0$.

16. 设 X 是任一非空集，$\mathscr{A} \subset 2^X$ 满足：(i) $A \subset B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \in \mathscr{A}$；(ii) $A_n \in \mathscr{A} (n = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathscr{A}$；(iii) $X \bar{\in} \mathscr{A}$. 令 $\mathscr{A}' = \{A;\ A \in \mathscr{A}$ 或 $A^c \in \mathscr{A}\}$；当 $A \in \mathscr{A}$ 时令 $\mu A = 0$，当 $A^c \in \mathscr{A}$ 时令 $\mu A = 1$，则 μ 是一完备概率测度.

17. 设 f^2 与集 $X(f > 0)$ 可测，则 f 可测.

18. 设 f 是有限可测函数，$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续或单调，则 $g(f(x))$ 可测.

19. 设 f_1, f_2 是 X 上的有限可测函数，$g \in C(\mathbf{R}^2)$，则 $g(f_1(x), f_2(x))$ 可测.

20. 设 f 在 $[a, b]$ 上可微，则 f' 可测.

21. 设 f 在每个区间 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ 上可测，则 f 在 $[a, b]$ 上可测.

22. 设 $f(x, y)$ 对 x 可测，对 y 连续，则 $\varphi(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant 1} f(x, y)$ 可测.

23. 设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 是紧集，$F \subset C(X)$，则 $\varphi(x) = \sup_{f \in F} f(x)$ 可测.

24. 设 $\mu X<\infty$，f 在 X 上可测，则 $\varphi(t)=\mu X(f<t)$ 处处左连续，几乎处处右连续.

25. 设 f 是有限可测函数，则有可测函数列 $\{f_n\}$，使 $f_n \rightrightarrows f(n\to\infty)$ 且每个 f_n 取可数个值.

26. 设 f 是有界可测函数，则有简单函数列 $\{\varphi_n\}$，使 $\varphi_n \rightrightarrows f(n\to\infty)$，且 $|\varphi_n|\leqslant|f|$.

27. 设 f 是几乎处处有限的可测函数，则有有界可测函数列 $\{f_n\}$，使 $f_n \xrightarrow{\mu} f(n\to\infty)$.

28. 设 $\{f_n\}\subset M(X)$，则集 $A=\{x:\lim\limits_n f_n(x)$ 存在且有限$\}$ 可测.

29. 设 $\mu X>0$，$f_n\in M(X)$，$f_n\to f$，a.e. $(n\to\infty)$，$|f|<\infty$，则 $\exists A\subset X$，使 $\{f_n\}$ 在 A 上一致有界且 $\mu A>0$.

30. 设 $f_n\to f$，a.u.，则 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $f_n\to f$，a.e..

31. 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，$f_n\leqslant f_{n+1}$，a.e. $(n=1,2,\cdots)$，则 $f_n\to f$，a.e..

32. 设 $\mu X<\infty$，$f_n \xrightarrow{\mu} f$，$p>0$，则 $|f_n|^p \xrightarrow{\mu} |f|^p$.

33. 设 $\mu X<\infty$，$f_n \xrightarrow{\mu} f$，$g\in C(\mathbf{R})$，$|f_n|$，$|f|<\infty$，则 $g\circ f_n \xrightarrow{\mu} g\circ f$.

34. 设 $\mu X<\infty$，f_n，g_n，f，g 是 X 上的有限可测函数，$f_n \xrightarrow{\mu} f$，$g_n \xrightarrow{\mu} g$，$\varphi\in C(\mathbf{R}^2)$，则 $\varphi(f_n(x),g_n(x)) \xrightarrow{\mu} \varphi(f(x),g(x))$.

35. 设 $\mu X<\infty$，$f_n\in M(X)(n=1,2,\cdots)$ 几乎处处有限，则 $\{f_n\}$ 有测度收敛子列 $\Leftrightarrow$ $\{f_n\}$ 有几乎处处收敛子列.

36. 设 $\mu X<\infty$，$f_n\in M(X)(n=1,2,\cdots)$，则 $f_n\to 0$，a.e. $\Leftrightarrow \sup\limits_{k\geqslant n}|f_k| \xrightarrow{\mu} 0(n\to\infty)$.

37. 设 $\mu X<\infty$，$f_n\in M(X)$，$f_n\to f$，a.e.，$|f_n|<\infty$，a.e. $(n=1,2,\cdots)$，则有 $A_k\subset X(k=1,2,\cdots)$，使 $\mu(\bigcup A_k)=\mu X$，且在每个 A_k 上 $f_n \rightrightarrows f(n\to\infty)$.

38. 设 $\mu X<\infty$，$f_n\in M(X)$，$|f_n|<\infty(n=1,2,\cdots)$，则存在 $\{a_n\}\subset\mathbf{R}$，使 $a_nf_n\to 0$，a.e. $(n\to\infty)$.

39. 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 可测，$\forall\,\varepsilon>0$，存在闭集 $F\subset X$，使 $f|F$ 连续且 $m(X\backslash F)<\varepsilon$，则 f 可测.

40. 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 可测，f 是 X 上几乎处处有限的可测函数，则存在序列 $\{f_k\}\subset C(\mathbf{R}^n)$，使得在 X 上 $f_k \xrightarrow{m} f(k\to\infty)$.

习 题 B

41. 作可测集 $A\subset[0,1]$，使对任何非空开区间 $\Delta\subset[0,1]$，恒成立 $m(\Delta\cap A)>0$ 且 $m(\Delta\setminus A)>0$.

42. 每个非空完备集 $A\subset\mathbf{R}$ 有非空完备子集 B，使 $mB=0$.

43. 设 $\mathbf{Q}=\{r_n:n\in\mathbf{N}\}$，$G=\bigcup(r_n-n^{-2},r_n+n^{-2})$，$F\subset\mathbf{R}$ 是闭集，则 $m(G\Delta F)>0$.

44. 设 $A\subset\mathbf{R}$，$mA>0$，则有 $x,y\in A$，使 $0\neq x-y\in\mathbf{Q}$.

45. 设 $A\subset\mathbf{R}$，$mA>0$，则有 $x,y\in A$，使 $x-y\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

46. 设 $A\subset\mathbf{R}$，$mA>0$，$0<p<1$，则有区间 Δ，使 $0<pm\Delta\leqslant m(A\cap\Delta)$.

47. 设 $A\subset\mathbf{R}$，$mA>0$，则 $(A+A)^{\circ}\neq\varnothing$；于是当 $A+A\subset A$ 或 $(A+A)/2\subset A$ 时 $A^{\circ}\neq\varnothing$.

48. 设 $(0,\infty)=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing\neq A,B$，$A+A\subset A$，$B+B\subset B$，则 A,B 均不可测.

49. 作可测集 $E\subset\mathbf{R}^2$，使 E 在 x 轴与 y 轴上的投影均不可测.

50. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$，$mA>0$，则 $\exists\, x\in A$，$\forall\,\delta>0$，有 $m(A\cap B_\delta(x))>0$.

51. 设 f 是可测函数，$B\subset\mathbf{R}$ 可测，则 $f^{-1}(B)$ 未必可测.

52. 可测函数的复合函数未必可测.

53. 作 $\mathbf{R}$ 上几乎处处有限的可测函数 f，使任何与 f 几乎处处相等的函数处处不连续.

54. 作 $[0,1]$ 上的有界可测函数 f，使它不与任何连续函数几乎处处相等.

55. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 可测，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)=ax$.

56. 设 $\mu X<\infty$，$f_n\in M(X)$，$f_n\to\infty$，a.e.，则 $\forall\,\delta>0$，$\exists\, X_\delta\subset X$，使 $\mu X_\delta<\delta$，在 X_δ 上 $f_n\not\to\infty(n\to\infty)$.

57. 设 $f_n\in M(X)(n=1,2,\cdots)$ 几乎处处有限，则 $\{f_n\}$ 测度收敛 $\Leftrightarrow\forall\,\sigma>0$：$\mu X(|f_m-f_n|\geqslant\sigma)\to0(m,n\to\infty)$.

58. 设 $\mu X<\infty$，$\{f_n\}\subset M(X)$，$f_n\to0$，a.e.，则存在序列 $\{a_n\}\subset\mathbf{R}$，使 $\sum|a_n|=\infty$ 而 $\sum|a_nf_n|<\infty$，a.e..

59. 设 μ^* 是 X 上的外测度(以下皆如此),μ^*A 与 μ^*B 有限,则

$$|\mu^*A - \mu^*B| \leqslant \mu^*(A\Delta B).$$

60. 设 $\mu^*(A\Delta B) = 0 = \mu^*(B\Delta C)$,则 $\mu^*(A\Delta C) = 0$.

61. 设 $\mu^*A < \infty$,B 为 μ^*-可测,则

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*A + \mu^*B - \mu^*(A \cap B).$$

62. 设 $B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$是互不相交的 μ^*-可测集,$A_i \subset B_i$,则 $\mu^*(\bigcup A_i) = \sum \mu^*A_i$.

63. 设 $f:\ X \to X$ 是双射,$\mu^*f(A) = \mu^*A(\forall\ A \subset X)$,则当 A 为 μ^*-可测时 $f(A)$亦然.

64. 设 $A \subset \mathbf{R}$,则有 G_δ 集 B,使 $A \subset B$,且 $m^*A = mB$.

65. 设 $A_n \subset \mathbf{R}$,$\{A_n\}$是升列,则 $m^*(\bigcup A_n) = \lim\limits_n m^*A_n$.

66. 作互不相交的 $A_n \subset \mathbf{R}(n = 1,2,\cdots)$,使 $m^*(\bigcup A_n) < \sum m^*A_n$.

67. 设 $A \subset \mathbf{R}$,$0 \leqslant \alpha \leqslant m^*A$,则有 $B \subset A$,使 $m^*B = \alpha$.

68. 设 $m_*A = \sup\{mC:\ C \subset A$ 为紧集$\}$. 若 $A \subset \mathbf{R}$,$m_*A = m^*A < \infty$,则 A 可测.

69. 设 $A \subset [-a,a]$,$mA > a > 0$,则存在 $B \subset A$,使得 $mB > 0$,且 B 关于原点对称.

70. 设 $A \subset \mathbf{R}$,$mA > 0$,则 $\exists\ \varepsilon > 0$,当 $|x| < \varepsilon$ 时 $m(A \cap (A + x)) > 0$.

第三章 Lebesgue 积分

现在进入本书的中心内容：Lebesgue 积分论. Lebesgue 积分（以下简称“L 积分”）是 Riemunn 积分（以下简称“R 积分”）的一种推广，它不像 R 积分那样过于受局限，亦不像某些更一般的积分那样过于繁琐. 因此被公认为是现代分析中最合适的一种积分工具. 本章在测度论的基础上引进 L 积分概念，以尽可能简捷而又系统的方式给出 L 积分的主要性质，并建立 L 积分与 R 积分的联系. 某些较繁琐的证明放在最后一节，跳过这些证明完全不影响对本章基本内容的理解与运用. 本章列举了较多的例子说明 L 积分确比 R 积分更灵活方便. 读者如能仔细完成本章后面的练习，将会加深这一印象.

本章中，$(X,\mathscr{A},\mu)$ 记给定的测度空间，$M(X)$ 与 $S(M)$ 分别记 X 上的可测函数与简单函数之全体，其中的非负函数构成的子集分别记作 $M^+(X)$ 与 $S^+(X)$.

§ 3.1 Lebesgue 积分的引入

读者从微积分学中熟知的定积分、重积分及（第一类）曲线曲面积分[①]，皆建立在“分割、求和、取极限”这一标准程序的基础上，它们统称为 Riemann 积分或“R 积分”. 为简单起见，以下用 $\int_D f$ 记函数 f 在 D 上的 R 积分，D 是区间（对定积分），或区域（对重积分），或曲面（对曲面积分），等等. R 积分的主要性质可概述如下：

(R₁) 线性性：$\int_D(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_D f+\beta\int_D g.$

① 如所熟知，第二类曲线（或曲面）积分可归结为第一类曲线（或曲面）积分.

($\mathbf{R}_2$) 可加性：$\int_D f = \sum \int_{D_i} f$，其中 $D_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 内部互不相交，$D = \bigcup_i D_i$.

($\mathbf{R}_3$) 单调性：$f \leqslant g \Rightarrow \int_D f \leqslant \int_D g$.

以上假定积分 $\int_D f$、$\int_D g$ 存在，α,β 为实常数.

($\mathbf{R}_4$) 积分收敛定理：若在 D 上 R 可积的函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛于函数 f，D 有界，则 f 在 D 上 R 可积，且 $\int_D f = \lim\limits_n \int_D f_n$.

($\mathbf{R}_5$) Newton-Leibniz 公式：若 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，F 是 f 的原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

($\mathbf{R}_6$) 积分互换：若函数 $f(x,y)$ 在矩形 $D = [a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

R 积分固然价值甚大，但仍在许多方面不能令人满意. 首先，它几乎专为区间或区域上的连续函数而设（参看本章 § 3.4），对连续性较差或定义域很复杂的函数都不能求 R 积分，更不必说定义于一般测度空间上的函数了. 而对这些更一般的函数考虑积分，在许多领域（如分析本身、概率论及物理学等）有愈来愈大的重要性. 其次，R 积分的性质（主要是性质($\mathbf{R}_1$)～($\mathbf{R}_6$)）很不理想. 例如，尽管在 $(0,1]$ 上 $(1-x^2)^n \to 0$，但我们不能利用性质($\mathbf{R}_4$)得出

$$\lim_n \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_n (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 0,$$

因为当 $n\to\infty$ 时，在 $[0,1]$ 上 $(1-x^2)^n$ 并不一致收敛于零. 还有，将 R 积分用作研究某些函数空间的理论工具尤不合适，其理由将在下

章指明.因此,有必要引进新的积分.我们预期新积分将满足:对任何测度空间上的可测函数(加上很一般的限制)都可求积分;新积分能在类似形式下保持并改进性质$(\mathbf{R}_1)\sim(\mathbf{R}_3)$,而性质$(\mathbf{R}_4)\sim(\mathbf{R}_6)$则从根本上得到加强,这就能基本上消除R积分的主要缺陷.此外,对于依R积分绝对可积的函数,我们要求新积分与R积分一致.能满足所有上述要求的积分,首先由法国数学家Lebesgue在他所创立的测度论的基础上建立起来,因而称之为Lebesgue积分,或简称L积分.

以下在一般测度空间$(X,\mathscr{A},\mu)$中建立积分理论.这样做不仅不会增加任何困难,实际上还使理论形式更为简洁.不过,读者初学时不妨将X想象为$\mathbf{R}^n$(甚至$\mathbf{R}$)中某个Lebesgue可测集,以获得更直观的理解.

积分的引进遵循由特殊到一般的原则,分为三个递进的步骤:从非负简单函数开始,进而至非负可测函数,最后到一般可测函数.

3.1.1 定义 (i) 若$f=\sum \alpha_i\chi_{e_i}\in S^+(X)$,$e_i(1\leqslant i\leqslant n)$是$X$中互不相交的可测集,$0\leqslant\alpha_i\in\mathbf{R}$,则规定

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\sum\alpha_i\mu e_i. \tag{2}$$

当$\alpha_i=0$,$\mu e_i=\infty$时,按约定(参看§2.3)取$\alpha_i\mu e_i=0$.

(ii) 若$f\in M^+(X)$,则规定

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\sup_{f\geqslant\varphi\in S^+(X)}\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu. \tag{3}$$

注意式(2)与(3)右端均可能为∞.

(iii) 若$f\in M(X)$,$\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu$与$\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu$中至少有一个为有限,则规定(参照§2.3(5))

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu-\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu, \tag{4}$$

且称$\int_X f\mathrm{d}\mu$为f在X上关于测度μ的积分.若$\int_X f\mathrm{d}\mu$有限(这等价于式(4)右端两项皆有限),则说f在X上关于测度μ可积.

若 X 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集，f 在 X 上关于 Lebesgue 测度 m 的积分存在，则称 $\int_X f\mathrm{d}m$ 为 f 在 X 上的 Lebesgue 积分，或简称"L 积分"；而关于 Lebesgue 测度可积称为 Lebesgue 可积，或简称"L 可积". 如某些学者所主张的，在广义的意义上，也可将 3.1.1 所定义的更一般的积分称为 Lebesgue 积分，或"抽象 Lebesgue 积分". 为行文方便起见，本书有时也将 3.1.1 所定义的积分与可积称为 L 积分与 L 可积，以强调与 R 积分的区别.

对于 3.1.1 这个较长的定义，需作几点说明.

1° 定义式(2)与表达式 $f=\sum\alpha_i\chi_{e_i}$ 的选择无关. 事实上，f 有标准表示 $f=\sum\beta_j\chi_{\sigma_j}$，$\sigma_j$ 是 X 中互不相交的可测集，$\beta_j\in[0,\infty)$ 互不相同，$1\leqslant j\leqslant m$(参看 §2.3). 注意，当 $\alpha_i=\beta_j$ 时必定 $e_i\subset\sigma_j$，且 σ_j 是所有这种 e_i 之并. 于是利用测度 μ 的可加性得出：

$$
\begin{aligned}
\sum_i\alpha_i\mu e_i &= \sum_j\sum_{\alpha_i=\beta_j}\alpha_i\mu e_i \\
&= \sum_j\beta_j\sum_{\alpha_i=\beta_j}\mu e_i \\
&= \sum_j\beta_j\mu\Big(\bigcup_{e_i\subset\sigma_j}e_i\Big) \\
&= \sum_j\beta_j\mu\sigma_j.
\end{aligned}
$$

2° 容易看出：若 $f\in S^+(X)$，则依(2)，(3)两式计算的 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 一致；若 $f\in M^+(X)$，则以(3)，(4)两式计算的 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 一致. 因此 3.1.1 所定义的积分是唯一确定的.

3° 若积分 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 存在而 f 不可积，则 $\int_X f\mathrm{d}\mu=\infty$ 或 $-\infty$；若 $\int_X f^+\mathrm{d}\mu=\int_X f^-\mathrm{d}\mu=\infty$，则 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 无定义. 注意"积分存在"与"可积"是有区别的两个概念. 在积分论中，容许使用取值 $\pm\infty$ 的积分有其方便之处，但也可能引起一些麻烦，必须细心处理.

4° 在测度空间这一抽象框架内，似乎谈不上积分的直观解释．但如下的示意图还是为积分提供了颇为形象的表示．在图 3-1 中，积分被表为某种"面积"．实际上，对这一解释可以赋予某种严格的意义（如见 3.5.4）．

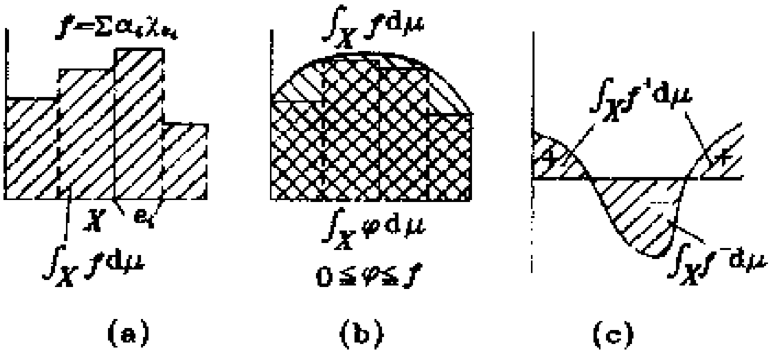


图 3-1

例 1 对任给可测集 $A\subset X$，依式(2)有

$$\int_X \chi_A \mathrm{d}\mu = \mu A. \tag{5}$$

(5)式常用来实现测度与积分的互相转化．

例 2 对于熟知的 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbf{Q}}$（$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ 是有理数集），由式(5)有

$$\int_{\mathbf{R}} \chi_{\mathbf{Q}} \mathrm{d}m = m\mathbf{Q} = 0.$$

可见，即使处处间断的函数亦可能 L 可积．

任何非空可测集 $A\subset X$ 本身就是一个测度空间（见 §2.2 例 4），因而可依 3.1.1 定义 A 上的积分．不过，A 上的积分恒可归结为 X 上的积分，因有

3.1.2 命题 设 $f\in M(X)$，$\int_X f\mathrm{d}\mu$ 存在，$A\subset X$ 可测，则 $\int_A f\mathrm{d}\mu$ 亦存在，且

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_A \mathrm{d}\mu. \tag{6}$$

证明是直接的，留作练习. 通常用(6)作为 $\int_A f\mathrm{d}\mu$ 的定义，这就也能包括 $A = \varnothing$ 的情况.

最后，对积分记号作些说明. 在 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 中，f，X，$\mathrm{d}\mu$ 分别表示**被积函数**、**积分域**与所用的测度，三者各有其用. 不过，只要能从上下文作出判断而不致混淆，就可用较省略的记号，如

$$\int f\mathrm{d}\mu,\ \int_X f,\ \int f,\ \int_X \text{等}.$$

另一方面，若必要表出"积分变量" x，则用记号

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu \quad \text{或} \quad \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

当 $X \subset \mathbf{R}^n$ 而无特殊说明时，总取 μ 为 n 维 Lebesgue 测度 m，相应的积分记为

$$\int_X f\mathrm{d}m, \int_X f(x)\mathrm{d}m \quad \text{或} \quad \int_X f(x)\mathrm{d}x,$$

其中的 $\mathrm{d}x$ 就表示测度 m. 当 $X = [a,b]$ 时 $\int_X f\mathrm{d}m$ 写作：

$$\int_a^b f\mathrm{d}m \quad \text{或} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

不必担心后一记号会与 R 积分混淆，因在 §3.4 中将指明，L 积分实际上涵盖了 R 积分.

下面约定以 $L^1(X,\mu)$ 记 X 上关于测度 μ 可积的函数之全体，只要不致混淆，就将它简写成

$$L^1(X), L^1(\mu) \text{ 或 } L^1.$$

若 $X \subset \mathbf{R}^n$，则 $L^1(X)$ 总表示 $L^1(X,m)$. $L^1((a,b))$就写作 $L^1(a,b)$；$L^1[a,b]$，$L^1[a,\infty)$ 等的意义自明. 注意 $L^1(a,b)$ 与 $L^1[a,b]$ $(-\infty<a<b<\infty)$并无区别(参看 3.2.4).

§3.2 Lebesgue 积分的初等性质

为便于理解与把握，我们将积分的性质分为两部分. 其一是概括在 3.2.1 中的**基本性质**($\mathbf{L}_1$)～($\mathbf{L}_4$)，它们构成整个积分论的基础，且可与 R 积分的性质($\mathbf{R}_1$)～($\mathbf{R}_3$)(见上节)相对照. 其二是**导出性质**(如本节的 3.2.2～3.2.8)，它们是基本性质的逻辑推论.

以下设 $f,g\in M(X)$ 是给定的，当 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 存在时就记作 $\int_X f$.

3.2.1 定理 积分有如下基本性质：

($\mathbf{L}_1$) 线性性：若 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，$f,g\in L^1$；或 $\alpha,\beta\in[0,\infty)$，$f,g\in M^+(X)$，则

$$\int_X(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_X f+\beta\int_X g.$$

($\mathbf{L}_2$) σ-可加性①：若 $A_n\subset X(n=1,2,\cdots)$ 是互不相交的可测集，$X=\bigcup A_n$，$\int_X f$ 有定义，则

$$\int_X f=\sum_n\int_{A_n}f.$$

($\mathbf{L}_3$) 单调性：若 $f\leqslant g$，$\int_X f$ 与 $\int_X g$ 存在，则 $\int_X f\leqslant\int_X g$.

($\mathbf{L}_4$) 若 $A\subset X$，$\mu A=0$，则 $\int_A f=0$.

以上定理的证明直接基于定义 3.1.1.，颇为繁琐，故放在本章最后一节.

性质($\mathbf{L}_1$)，($\mathbf{L}_3$)不过是 R 积分性质($\mathbf{R}_1$)，($\mathbf{R}_3$)的简单移用. 但性质($\mathbf{L}_2$)则比($\mathbf{R}_2$)强得多，下面的简单例子说明了它有多么出色的应用.

---

① 因由($\mathbf{L}_4$)有 $\int_\varnothing f=0$，故当 $A,B\subset X$ 可测，$X=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$ 时由($\mathbf{L}_2$)有 $\int_X f=\int_A f+\int_B f$. 可见性质($\mathbf{L}_2$)与($\mathbf{L}_4$)一起蕴涵了有限可加性.

例 1 设 μ 是 $\mathbf{N}$ 上的计数测度(参看 §2.2 例 2),$f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$,则由性质($\mathbf{L}_2$)有

$$\int_{\mathbf{N}} |f| \mathrm{d}\mu = \sum_n \int_{\{n\}} |f| \mathrm{d}\mu = \sum_n |f(n)|,$$

可见 $f \in L^1(\mu) \Leftrightarrow \sum |f(n)| < \infty$. 若 $f \in L^1$,$\{n_1, n_2, \cdots\}$ 是 $\mathbf{N}$ 的另一排列,则再用性质($\mathbf{L}_2$)得

$$\sum_n f(n) = \int_{\mathbf{N}} f \mathrm{d}\mu = \sum_k \int_{\{n_k\}} f \mathrm{d}\mu = \sum_k f(n_k).$$

这就证明了:绝对收敛级数各项可以任意重排. 这个重要的分析定理是读者熟知的,它原来的证明远没有如此简捷①.

下面考虑 3.2.1 的各种推论. 首先建立一个很有用的不等式(有时称之为 Chebyshev 不等式).

3.2.2 引理 任给正数 σ,有

$$\mu X(|f| \geqslant \sigma) \leqslant \frac{1}{\sigma} \int_X |f|. \tag{1}$$

证 令 $A = X(|f| \geqslant \sigma)$,$B = A^c$. 由性质($\mathbf{L}_2$)、($\mathbf{L}_3$)有

$$\begin{aligned} \int_X |f| &= \int_A |f| + \int_B |f| \\ &\geqslant \int_A |f| \geqslant \sigma \mu A, \end{aligned}$$

由此得出式(1). □

关于可积性有以下结论:

3.2.3 命题 (i) 充要条件:$f \in L^1 \Leftrightarrow |f| \in L^1$.

(ii) 必要条件:若 $f \in L^1$,则 f 几乎处处有限,且集 $X(f \neq 0)$ 有 σ-有限测度.

(iii) 充分条件:若存在 $g \in L^1$,使 $|f| \leqslant g$,则 $f \in L^1$;特别,若 f 有界且 $\mu X < \infty$,则 $f \in L^1$.

---

① 但不能说此处的证明比数学分析教材中的证明更优越. 须知此处用到的积分"σ-可加性"远不是不证自明的结论(参照 p. 39 的脚注).

证　(i) 由 3.1.1 知 $f\in L^1 \Leftrightarrow f^+, f^- \in L^1$. 若 $f\in L^1$，则由 $|f| = f^+ + f^-$ (§2.3(5)) 及性质 ($\mathbf{L}_1$) 得出 $|f|\in L^1$. 反之，若 $|f|\in L^1$，则由 $f^\pm \leqslant |f|$ 及性质 ($\mathbf{L}_3$) 知 $f^+, f^- \in L^1$，从而 $f\in L^1$.

(ii) 设 $f\in L^1, n\in\mathbf{N}$，则由 3.2.2 有

$$\mu X(|f| = \infty) \leqslant \mu X(|f| \geqslant n) \leqslant \frac{1}{n}\int_X |f|; \tag{2}$$

$$\mu X(|f| \geqslant 1/n) \leqslant n\int_X |f| < \infty. \tag{3}$$

(2) 推出 $X(|f| = \infty) = 0$，从而 $|f| < \infty$, a.e.；(3) 推出 $X(f\neq 0) = \bigcup_{n=1}^\infty X(|f| \geqslant 1/n)$ 有 σ-有限测度.

(iii) 是显然的，请读者自己推证. □

3.2.3 表明，对于 L 积分，可积即"绝对可积"，因此"绝对可积"概念失去意义，这是与 1 维 R 积分所不同的. 例如，$f(x) = x^{-1}\sin x$ 在 $[0,\infty)$ 上(广义)R 可积，但并非绝对可积. 粗略地说，R 可积可能依赖于被积函数的正负值相消；而对于 L 积分，f^+ 与 f^- 是分别积分的(见上节(4))，因此不能依靠互相抵消来保证可积. f 为 L 可积全赖于 f 的绝对值受到一定"控制". 当 $|f| \leqslant g$ 时，可以说"f 受控于 g". 若 f 被可积函数 g 控制，则无论 f 如何复杂(如有剧烈振荡或间断，参看图 3-2)，也必定可积. 这就使得判定 L 可积相对简单了. 而当 $\mu X < \infty$ 时，对于 X 上的有界可测函数完全不存在判定可积性的问题. 仅此一点，已显示出 L 积分相对于 R 积分的优越性.

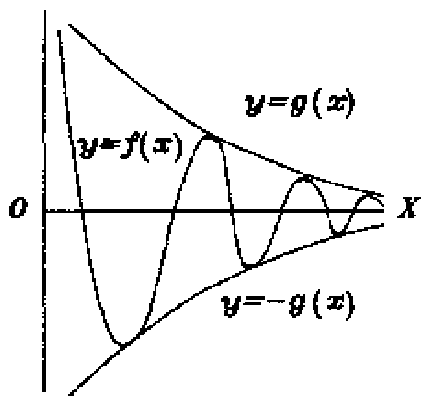


图 3-2

3.2.4 命题　若 $f = g$, a.e., $\int_X f$ 存在，则 $\int_X g$ 亦存在，且 $\int_X f = \int_X g$.

证 令 $A = X(f = g)$，$B = A^c$，则 $\mu B = 0$. 于是由性质(L_4)有$\int_B f^+ = \int_B g^+ = 0$. 由性质($L_2$)有

$$\int_X f^+ = \int_A f^+ + \int_B f^+$$
$$= \int_A g^+ + \int_B g^+ = \int_X g^+.$$

同理$\int_X f^- = \int_X g^-$，由此知命题结论成立. □

3.2.4 表明，被积函数在某个零测集上的值，对于可积性及积分值都无影响. 鉴于此，在处理 L 积分问题时，可依需要随意改变被积函数在某个零测集上的值，甚至不必顾及函数在某个零测集上是否有定义. 例如，我们可以谈到函数 $f(x) = |\sin x^{-1}|^{-1/2}$ 在 $[0,1]$ 上的 L 积分，尽管它在一无限集上没有定义. 再如，若 $f,g \in L^1$，则至多在一零测集上 $f(x) = g(x) = \pm\infty$（见上面的 3.2.3），在这些点处 $f - g$ 无定义，但这并不妨碍运用积分 $\int_X (f-g)$. 基于同一理由，所有关于 L 积分的定理，其条件只需要"几乎处处成立"就够了. 例如，3.2.3 (iii) 中的条件"$|f| \leqslant g$"，就可改成"$|f| \leqslant g$, a.e.". 今后碰到类似情况时都作此处理，读者应形成一个系统连贯的看法. 可以说，在 L 积分论中容许某种程度的"粗略"，正是这种可容许的"粗略性"，使 L 积分特别方便灵活，非 R 积分所能比拟.

由性质(L_3)可推出一些涉及积分的不等式.

3.2.5 命题 (i) 若 $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$，$\alpha,\beta \in \mathbf{R}$，$\mu X < \infty$，则

$$\alpha\mu X \leqslant \int_X f \leqslant \beta\mu X.$$

(ii) 若 $f \in L^1$，则 $\left|\int_X f\right| \leqslant \int_X |f|$.

(iii) 若 $f,g \in L^1$，$f \leqslant g$, a.e.，$\int_X f = \int_X g$，则 $f = g$, a.e.；特别，若$\int_X |f| = 0$，则 $f = 0$, a.e..

证 (i) 直接由性质(L_3)得出.

(ii) 由 $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ 及性质(L_3),(L_1)有

$$-\int_X |f| \leqslant \int_X f \leqslant \int_X |f|,$$

此即 $\left|\int_X f\right| \leqslant \int_X |f|$.

(iii) 可设 $f \geqslant 0$,a.e.,$\int_X f = 0$,往证 $f = 0$,a.e.(否则以 $g - f$ 代 f). 由 3.2.2 有

$$\mu X(f \geqslant 1/n) \leqslant n\int_X f = 0 \ (n = 1,2,\cdots),$$

故

$$\begin{aligned}\mu X(f > 0) &= \mu(\bigcup_n X(f \geqslant 1/n)) \\ &\leqslant \sum_n \mu X(f \geqslant 1/n) = 0;\end{aligned}$$

$$\mu X(f \neq 0) = \mu X(f > 0) + \mu X(f < 0) = 0,$$

这表明 $f = 0$,a.e.. □

为举例方便起见,我们提前利用将在§3.4中证明的结论(见3.4.1、3.4.2):设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$,$f$ 在(a,b)内的任何有限区间上常义R可积,R积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 有限或 $f \geqslant 0$,则

$$\int_a^b f\mathrm{d}m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

右端表(常义或广义)R积分.

例 2 设 f 在 $[a,b]$ $(a < b)$上R可积且 $f(x)>0(a < x < b)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证 否则 $\int_a^b f\mathrm{d}m = 0$,于是由3.2.5(iii)得出 $f = 0$,a.e.,这显然与假定矛盾.

注意,从表面上看,例2完全是一个R积分问题. 如若不用L积分,虽然也能解决(读者不妨一试!),但却繁琐得多.

3.2.6 命题 若 $f \in M^+(X)$,则 $\mathscr{A}$ 上的集函数 $\nu: A \to \int_A f$

是一个测度.

证明是直接的，留作练习.

3.2.6 的意义在于，可以直接将 §2.2 中关于测度的结论用于积分. 例如，设 $f\in M^+(X)$，$A,B\subset X$ 可测，$A\subset B$，则由测度的单调性(2.2.3)得出 $\int_A f\leqslant\int_B f$. 类似地，还有

3.2.7 命题 设 $A_n\subset X(n=1,2,\cdots)$可测.

(i) 下连续性：若$\{A_n\}$为升列，$A=\bigcup A_n$，$f\in L^1$ 或 $f\in M^+(X)$，则 $\int_{A_n}f\to\int_A f\ (n\to\infty)$.

(ii) 上连续性：若$\{A_n\}$为降列，$A=\bigcap A_n$，$f\in L^1$，则 $\int_{A_n}f\to\int_A f\ (n\to\infty)$.

证 (i) 当 $f\geqslant 0$ 时结论直接由 3.2.6 与 2.2.3(iv) 得出. 若 $f\in L^1$，则

$$\lim_n\int_{A_n}f=\lim_n\int_{A_n}f^+-\lim_n\int_{A_n}f^-$$
$$=\int_A f^+-\int_A f^-=\int_A f.$$

(ii) 的证明是类似的，由读者自己完成. □

例 3 设 $f\in L^1[a,\infty)$，$a<b_n\uparrow\infty$，则由 3.2.7 有

$$\int_a^{\infty}f\mathrm{d}m=\lim_n\int_a^{b_n}f\mathrm{d}m.$$

这与广义 R 积分的情形类似.

3.2.8 命题 若 $f\in L^1$，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，对任何可测集 $e\subset X$，只要 $\mu e<\delta$，就有 $\left|\int_e f\right|<\varepsilon$.

以上命题所描述的性质称为**积分的绝对连续性**，可简写作

$$\lim_{\mu e\to 0}\int_e f\mathrm{d}\mu=0.$$

证 不妨设 $f\geqslant 0$ (否则以 $|f|$ 代 f). 若结论不真，则存在

$\varepsilon > 0$与$e_n \subset X(n=1,2,\cdots)$,使$\mu e_n \to 0(n\to\infty)$,而$\int_{e_n} f \geqslant \varepsilon$.不妨设$\mu e_n < 2^{-n}(n=1,2,\cdots)$,令$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} e_k, A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$,则由3.2.7(ii)有

$$\int_A f = \lim_n \int_{A_n} f \geqslant \overline{\lim_n} \int_{e_n} f \geqslant \varepsilon.$$

另一方面,由2.2.3(v)有

$$\begin{aligned}\mu A &= \lim_n \mu A_n \leqslant \lim_n \sum_{k\geqslant n} \mu e_k \\ &\leqslant \lim_n \sum_{k\geqslant n} 2^{-k} = 0,\end{aligned}$$

故$\mu A = 0$.于是由性质(L_4)有$\int_A f = 0$,得出矛盾. □

至此为止,我们已经给出L积分的主要初等性质.必须强调指出,这些结果具有极大的一般性,它们对于空间X与所涉及函数的要求都相当宽泛.首先,并没有假定$X \subset \mathbf{R}^n$及$\mu X < \infty$,自然更不存在"X是否有界"的问题.对于被积函数,亦无有界性的限制,更谈不上对连续性的要求.不同于R积分,L积分根本就没有"常义"与"广义"积分之别①.L积分论的高度统一与简洁,足以令人满意.

然而,要将R积分的一些较精细的结果,例如变量代换公式推广于L积分,就必须加强对空间X及测度μ的限制.下面是一简单结果.

3.2.9 命题 设$\int_{\mathbf{R}^n} f\mathrm{d}m$存在,$a \in \mathbf{R}^n$,则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} f(x+a)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(-x)\mathrm{d}x. \qquad (4)\end{aligned}$$

证 不妨只证第一个等号,且可设$f \geqslant 0$(何故?).若$A \subset \mathbf{R}^n$可

① 也有一些作者(如见[7])将考虑有界可测集上的有界可测函数的积分作为建立Lebesgue积分论的第一步,但这种作法现已少见.

测，则由 Lebesgue 测度的平移不变性(2.1.6)知式(4)对 $f=\chi_A$ 成立，因而亦对非负简单函数成立. 于是(约定 φ 记简单函数)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} f(x+a)\mathrm{d}x &= \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x+a)\mathrm{d}x \\ &= \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$ □

§3.3 积分收敛定理

设 $f, f_n\in M(X)$，$n=1,2,\cdots$. 积分论的中心问题是，寻求尽可能方便的条件，使得能从 $f_n\to f$(在某种收敛意义下)推出

$$\int_X f=\lim_n\int_X f_n, \tag{1}$$

即

$$\int_X \lim_n f_n=\lim_n\int_X f_n.$$

以上等式意味着"积分与极限互换". 这一问题在 R 积分论中解决得很不理想，而在 L 积分论中却有比较满意的结果，两种积分的优劣主要由此见出分晓. 下面介绍的三大积分收敛定理，通常被认为是 L 积分论的中心结果(因而亦是实变函数论的基本结果)，被广泛应用于现代分析数学的各个领域.

3.3.1 Levi 定理 若 $0\leqslant f_n\uparrow f$，即 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\to f(x)$ $(x\in X, n\to\infty)$，则式(1)成立.

证 由积分的单调性知 $\int_X f_n$ 随 n 单调增加，且不超过 $\int_X f$，因此

$$\lim_n\int_X f_n\leqslant\int_X f.$$

余下只需证与此相反的不等式;为此,又只需证一个**形式上**更弱的不等式

$$\int_X \beta\varphi \leqslant \lim_n \int_X f_n, \tag{2}$$

其中 $\beta \in (0,1)$, $\varphi \in S^+(X)$, $\varphi \leqslant f$(参看 §3.1(3)). 令 $A_n = X(\beta\varphi \leqslant f_n)(n=1,2,\cdots)$,则 A_n 可测且 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$;由 $f_n \uparrow f$ 易推出 $X = \bigcup A_n$. 于是由 3.2.7 有

$$\int_X \beta\varphi = \lim_n \int_{A_n} \beta\varphi \leqslant \lim_n \int_{A_n} f_n$$

$$\leqslant \lim_n \int_X f_n. \qquad \square$$

例 1　令 $f_n(x) = -\frac{1}{x}\chi_{[0,1/n]}(x)$, $g_n = \chi_{[n,n+1]}(n=1,2,\cdots)$,则 $f_n \uparrow 0$, $0 \leqslant g_n \to 0(n \to \infty)$. 但

$$\int_0^1 f_n \mathrm{d}m = -\infty, \quad \int_0^\infty g_n \mathrm{d}m = 1,$$

二者都不能从积分号下取极限得到.

以上例子表明,3.3.1 中的条件"$f_n \geqslant 0$"与"f_n 对 n 单调增加"都是重要的.

若以 $\sum_{k=1}^n f_k$ 代替 3.3.1 中的 f_n,则得到 Levi 定理的以下级数形式:

3.3.2 推论　若 $f_n \in M^+(X)(n=1,2,\cdots)$,则

$$\int_X \sum_n f_n = \sum_n \int_X f_n. \tag{3}$$

形式上,3.3.2 给出**逐项积分**的规则.

值得注意的是,应用 3.3.1 或 3.3.2 时,**无需验证** f, f_n 可积或 $\sum f_n$ 收敛. 正因为如此,Levi 定理用起来特别方便,在 R 积分论中没有任何类似结果可与之比拟. 试看一个简单例子.

例 2　求 $I = \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} \mathrm{d}x$.

解 首先展开被积函数：

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}=xe^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}xe^{-nx}(x>0).$$

因上式右端每项在(0,∞)内非负连续，故由 3.3.2 可逐项积分：

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-nx}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{n}-\frac{1}{n^2}\right)e^{-nx}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

表面上看，以上演算似乎完全在微积分学的框架内进行. 但求和与积分互换的理由却不易用某条微积分学定理讲清楚. 用 Levi 定理则十分简明. 读者不妨自己从微积分学中找出一些类似例子，依例 2 的方式应用 Levi 定理.

3.3.3 Fatou 定理 若 $f_n\in M^+(X)(n=1,2,\cdots)$，则

$$\int_X\varliminf_n f_n\leqslant\varliminf_n\int_X f_n. \tag{4}$$

证 因 $\varliminf_n f_n=\lim_n\inf_{k\geqslant n}f_k$，而$\lim_{k\geqslant n}f_k$ 随 n 单调增加，故由 3.3.1 有

$$\int_X\varliminf_n f_n=\lim_n\int_X\inf_{k\geqslant n}f_k.$$

因式(4)右端可表为 $\lim_n\inf_{k\geqslant n}\int_X f_k$，故只需证

$$\int_X\inf_{k\geqslant n}f_k\leqslant\inf_{k\geqslant n}\int_X f_k,\ n=1,2,\cdots.$$

而这又归于证

$$\int_X\inf_{k\geqslant n}f_k\leqslant\int_X f_l,\ l\geqslant n=1,2,\cdots.$$

后者由显然的不等式 $\inf_{k\geqslant n}f_k\leqslant f_l(l\geqslant n)$推出. □

用例 1 中的 g_n 可指明，式(4)可能是严格不等式.

现在考虑属于 Lebesgue 的最重要的积分收敛定理.

3.3.4 控制收敛定理 设 $f_n \to f$, a.e. 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f(n\to\infty)$. 若存在 $g\in L^1$ 使 $|f_n|\leqslant g(n=1,2,\cdots)$，则 $f\in L^1$，

$$\lim_n \int_X |f_n - f| = 0, \tag{5}$$

且式(1)成立.

证 因容易从式(5)推出式(1)，故只需证(5).

首先设 $f_n\to f$, a.e.，因此 $|f|\leqslant g$, a.e.，于是 $f\in L^1$ 且 $|f_n - f|\leqslant 2g$, a.e. $(n=1,2,\cdots)$. 对 $2g-|f_n-f|$ 应用 3.3.3：

$$\begin{aligned}\int_X 2g &= \int_X \lim_n (2g - |f_n - f|)\\ &\leqslant \underline{\lim}_n \int_X (2g - |f_n - f|)\\ &= \int_X 2g - \overline{\lim}_n \int_X |f_n - f|,\end{aligned}$$

由此得出

$$\overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| \leqslant 0,$$

这与式(5)相当.

其次设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 若式(5)不成立，则有 $\varepsilon > 0$ 与 $n_1 < n_2 < \cdots$，使得

$$\int_X |f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon,\ k = 1,2,\cdots. \tag{6}$$

因 $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$，由 2.4.2(iii)，$\{f_{n_k}\}$有子列几乎处处收敛于 f. 为记号简便起见，不妨就设 $f_{n_k}\to f$, a.e. $(k\to\infty)$，于是由上段所证有

$$\int_X |f_{n_k} - f| \to 0\ (k\to\infty),$$

而这与式(6)矛盾. 因此式(5)成立，定理证毕. □

若 $\mu X<\infty$，则在 3.3.4 中取 $g\equiv K$ 得到：

3.3.5 推论(有界收敛定理) 设 $\mu X<\infty$, $f_n\to f$, a.e. 或

$f_n \xrightarrow{\mu} f$. 若$\{f_n\}$一致有界，即存在常数$K>0$，使$|f_n|\leqslant K(n=1,2,\cdots)$，则 3.3.4 的结论成立.

应用 3.3.5，立即解决§3.1 中提到的问题（见本书第 75 页）：

$$\lim_n \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_n (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 0.$$

而在 R 积分论框架内解此问题就没这么简单.

应用 3.3.4 的关键在于找出**控制函数** g. 试看一个实例.

例 3 求 $l = \lim_n \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x \dfrac{\ln(n+x)}{n}\mathrm{d}x$.

解 形式地互换积分与极限得

$$l = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x \lim_n \frac{\ln(n+x)}{n}\mathrm{d}x = 0.$$

但为说明如上演算合理，须求一控制函数. 首先注意，函数$\varphi(t)=t^{-1}\ln t$在区间$[1,\infty)$上的最大值为$\varphi(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{-1}$（用标准的微分法易证此）. 于是

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{e}^{-x}\cos x \frac{\ln(n+x)}{n}\right| \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-x}\frac{\ln(n+x)}{n+x}\cdot\frac{n+x}{n} \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-(x+1)}(1+x) \triangleq g(x)\ (x\geqslant 0, n=1,2,\cdots).
\end{aligned}$$

直接看出$\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$收敛，故$g\in L^1[0,\infty)$，于是$g$是合于 3.3.4 要求的控制函数. 因此$l=0$合于所求.

如同在微积分学中的一样，确立积分与极限互换的收敛定理是研究“参变积分”的有力工具. 考虑一种较简单的情况：设$Y\subset\mathbf{R}$是一区间，$f(x,y)$是定义于$X\times Y$上的实函数，对每个固定的$y\in Y$，$f(x,y)$关于x在X上可积，于是

$$\varphi(y) = \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{7}$$

是定义于Y上的有限实函数. 利用 3.3.4 可建立

3.3.6 定理 对于式(7)表示的函数φ有以下结论：

(i) 若存在 $g\in L^1(X)$，使得 $|f(x,y)|\leqslant g(x)$ $(\forall\ x\in X, y\in Y)$，则

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\int_X\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}\mu(x),\tag{8}$$

只要右端积分号下的极限对几乎所有的 $x\in X$ 存在.

(ii) 若存在 $g\in L^1(X)$，使得 $|f(x,y)|\leqslant g(x)(\forall\ x\in X, y\in Y)$，且对几乎所有的 $x\in X$，$f(x,y)$ 对 y 在 $y_0\in Y$ 连续，则 $\varphi(y)$ 在 y_0 连续.

(iii) 若偏导数 $f_y(x,y)$ 存在，且存在 $g\in L^1(X)$，使得 $|f_y(x,y)|\leqslant g(x)(\forall\ x\in X, y\in Y)$，则

$$\varphi'(y)=\int_X f_y(x,y)\mathrm{d}\mu(x).\tag{9}$$

证　(i) 式(8)相当于对任何收敛于 y_0 的序列 $\{y_n\}\subset Y$ 有

$$\lim_n\int_X f(x,y_n)\mathrm{d}\mu(x)=\int_X\lim_n f(x,y_n)\mathrm{d}\mu(x).$$

因 $|f(x,y_n)|\leqslant g(x)(\forall\ x\in X, n=1,2,\cdots)$，故上式可从 3.3.4 得出.

(ii) 是(i)的直接推论.

(iii) 取定 $y\in Y$，令

$$F(x,z)=\frac{f(x,z)-f(x,y)}{z-y},$$

则式(9)相当于

$$\lim_{z\to y}\int_X F(x,z)\mathrm{d}\mu(x)=\int_X\lim_{z\to y}F(x,z)\mathrm{d}\mu(x).\tag{10}$$

由微分中值定理，当 $z\in Y, z\neq y$ 时有 $\bar{z}\in Y$，使

$$|F(x,z)|=|f_y(x,\bar{z})|\leqslant g(x)\ (\forall\ x\in X).$$

于是由已证的结论(i)推出式(10)成立.　□

例 4　设 $f\in L^1(\mathbf{R})$，讨论函数

$$\varphi(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x\ (y\in\mathbf{R})\tag{11}$$

的连续性与可微性.

解 以 $F(x,y)$ 记式(11)右端的被积函数，则 $F(x,y)$ 对 y 连续，且

$$|F(x,y)| \leqslant |f(x)|;\ |F_y(x,y)| \leqslant |xf(x)|.$$

因此由 3.3.6 推出：$\varphi(y)$ 处处连续；当 $xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上 L 可积时，$\varphi(y)$ 处处可微，且

$$\varphi'(y) = -\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\cos(xy)\mathrm{d}x.$$

§ 3.4 与 Riemann 积分的联系

本节以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 记(常义或广义)R 积分.

3.4.1 定理 设 $-\infty < a < b < \infty$，f 是区间 $J=[a,b]$ 上的有界实函数. 则 f 在 J 上 R 可积当且仅当 f 在 J 上几乎处处连续；当 f 在 J 上 R 可积时亦必 L 可积，且两种积分值相等.

证 任取 J 的一列分割 $J=\bigcup_i J_{ni}(n=1,2,\cdots)$，$J_{ni}(i=1,2,\cdots,k_n)$ 是 J 的无公共内点的子区间，$\max_i mJ_{ni} \to 0(n\to\infty)$. 分别以 α_{ni} 与 β_{ni} 记 f 在 J_{ni} 上的下确界与上确界，令

$$\varphi_n = \sum_i \alpha_{ni}\chi_{J_{ni}},\ \psi_n = \sum_i \beta_{ni}\chi_{J_{ni}}$$

(参看图 3-3). 其次，定义

$$\varphi(x) = \varliminf_{t\to x} f(t),\ \psi(t) = \varlimsup_{t\to x} f(t).$$

这意味着，对每个 $x\in J$，$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta > 0$，当 $t\in J$ 且 $|t-x| < \delta$ 时 $f(t) > \varphi(x)-\varepsilon$；存在 $t_n \to x$，使 $f(t_n)\to\varphi(x)$. $\psi(x)$ 有类似的意义.

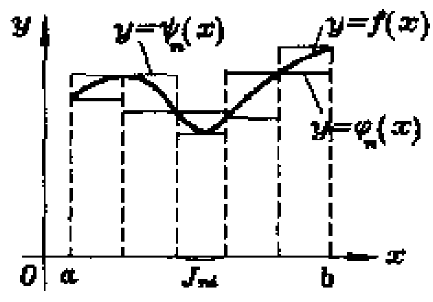


图 3-3

显然 $\varphi\leqslant f\leqslant\psi$，$f$ 在 x 连续 $\Leftrightarrow \varphi(x)=\psi(x)$.

1°　证 $\varphi_n\to\varphi$, a. e.，为此只需证：若 $x_0\in J$ 不是任何区间 J_{ni} 的端点，则有 $\varphi_n(x_0)\to\varphi(x_0)$. $\forall\, n$，取 i_n，使 $x_0\in J_{ni_n}$. 因在 J_{ni_n} 上 $f(x)\geqslant\varphi_n(x_0)$，故

$$\overline{\lim_n}\,\varphi_n(x_0)\leqslant\varliminf_{x\to x_0}f(x)=\varphi(x_0). \tag{1}$$

其次，取 $x_n\in J_{ni_n}$，使 $f(x_n)<\varphi_n(x_0)+n^{-1}$. 必定 $x_n\to x_0$，于是

$$\varphi(x_0)\leqslant\varliminf_n f(x_n)\leqslant\varliminf_n\varphi_n(x_0). \tag{2}$$

结合(1)，(2)两式即得 $\varphi_n(x_0)\to\varphi(x_0)(n\to\infty)$.

同理有 $\psi_n\to\psi$, a. e.. 于是 φ,ψ 在 J 上可测.

2°　显然 φ_n 与 ψ_n 一致有界，故由 3.3.5 有

$$\int_a^b\varphi\,\mathrm{d}m=\lim_n\int_a^b\varphi_n\mathrm{d}m=\lim_n\sum_i\alpha_{ni}mJ_{ni};$$

$$\int_a^b\psi\,\mathrm{d}m=\lim_n\int_a^b\psi_n\mathrm{d}m=\lim_n\sum_i\beta_{ni}mJ_{ni}.$$

分别以 s 与 S 记以上两式之右端. 由关于 R 积分的熟知结论，f 在 J 上 R 可积 $\Leftrightarrow s=S\Leftrightarrow\int_a^b\varphi\,\mathrm{d}m=\int_a^b\psi\mathrm{d}m$. 于是由 3.2.5(iii) 知，$f$ 在 J 上 R 可积 $\Leftrightarrow\varphi=\psi$, a. e. $\Leftrightarrow f$ 在 J 上几乎处处连续. 若 f 在 J 上 R 可积，则 $f=\varphi$, a. e.，于是 f 在 J 上可测，且

$$\int_a^b f\mathrm{d}m=\int_a^b\varphi\,\mathrm{d}m=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad\square$$

3.4.1 彻底解决了 R 积分的可积性问题，是 Lebesgue 理论中最精采的结果之一. 它所给出的 R 可积性判别法如此简单而又深刻，使得在此以前的所有其他判别法都相形见绌. 直观地看，R 可积函数应局部地接近于常数，因而应有较好的连续性. 但像 3.4.1 这样精确表述的结论，却不能在 R 积分的框架内得出，而要求助于 Lebesgue 的测度与积分论. 3.4.1 是显示 L 积分强大力量的一个典型结果，正是这一类结果的涌现，使 L 积分确立了无可争辩的优势.

例 1　所谓 Riemann 函数 $f(x)$ 定义为：若 $x=m/n$，m,n 是互质的自然数，则令 $f(x)=1/n$；若 x 是无理数，则令 $f(x)=0$；

$f(0)=0$. 讨论 f 在 $[0,1]$ 上的可积性.

解 显然 $0\leqslant f(x)\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant 1)$. 任给 $n\in\mathbf{N}$, 仅有限个 $x\in[0,1]$, 使 $f(x)\geqslant 1/n$. 由此不难推出, f 在每个无理点 $x\in(0,1)$ 连续, 因而几乎处处连续. 由 3.4.1, f 在 $[0,1]$ 上 R 可积, 且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\mathrm{d}m=0.$$

注意, 例 1 中的 f 在每个有理点 $x\in(0,1]$ 间断. 由此可见, R 可积函数的间断点仍然可能"足够多", 以至在定义域内处处稠密.

例 2 设 f 在区间 $[a,b]$ 上(常义)R 可积, $g\in C(\mathbf{R})$, 则 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积.

证 设 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta\ (a\leqslant x\leqslant b)$. 因连续函数 g 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有界, 故 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上有界. 由 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续推出 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续, 因此 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积.

用 R 积分论本身的方法如何达到上面的结论, 读者不妨一试, 以作对比.

下面转而考虑广义 R 积分与 L 积分的关系. 为叙述简便, 仅考虑只有一个奇点的广义积分, 更一般的情况是类似的.

3.4.2 定理 设 $-\infty<a<b\leqslant\infty$, 对任给 $\beta\in(a,b)$, f 在 $[a,\beta]$ 上几乎处处连续且有界, 则

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^b |f|\mathrm{d}m. \tag{3}$$

因此 $f\in L^1(a,b)\Leftrightarrow$ 广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 当 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f\mathrm{d}m. \tag{4}$$

证 任取 $b_n\in(a,b)$, 使 $b_n\uparrow b$. 令 $f_n=f\chi_{[a,b_n]}$, 则在 $[a,b)$ 上 $f_n\to f$, $|f_n|\uparrow|f|\ (n\to\infty)$. 于是由 Levi 定理及 3.4.1 有

$$\int_a^b |f|\mathrm{d}m=\lim_n\int_a^b |f_n|\mathrm{d}m$$

$$= \lim_n \int_a^{b_n} |f| \mathrm{d}m$$

$$= \lim_n \int_a^{b_n} |f(x)| \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x,$$

式(3)得证. 若 $\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$，则 $f \in L^1(a,b)$. 因 $|f_n| \leqslant |f| \in L^1$，故由控制收敛定理及 3.4.1 有

$$\int_a^b f \mathrm{d}m = \lim_n \int_a^b f_n \mathrm{d}m$$

$$= \lim_n \int_a^{b_n} f(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f(x) \mathrm{d}x,$$

式(4)得证. □

由 3.4.2，若 f 在区间 (a,b) 内几乎处处连续，而广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 仅有限个奇点，则判定 $f \in L^1(a,b)$ 归于判定

$$\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x < \infty.$$

而一旦确立以上条件满足，则 f 在 (a,b) 上的 L 积分就是平常的广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

例 3 设 $\alpha > 0$，讨论函数 $f(x) = x^{-\alpha}\sin x$ 在区间 $(0,\infty)$ 上的可积性.

解 1° 直接看出，积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\alpha < 2$ 时绝对收敛，在 $\alpha \geqslant 2$ 时发散.

2° 因 $|f(x)| \leqslant x^{-\alpha}$，故积分 $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\alpha > 1$ 时绝对收敛. 若 $0 < \alpha \leqslant 1$，则用分部积分得：

$$\int_1^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{\cos x}{x^a}\bigg|_b^1 - a\int_1^b \frac{\cos x}{x^{a+1}}\mathrm{d}x \ (b > 1),$$

可见积分 $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；而由

$$|f(x)| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^a} = \frac{1}{2x^a} - \frac{\cos 2x}{2x^a}$$

看出 $\int_1^\infty |f(x)|\mathrm{d}x = \infty$.

综合起来得出结论：当 $1 < a < 2$ 时 $f \in L^1(0,\infty)$；当 $0 < a \leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上广义 R 可积而非 L 可积；当 $a \geqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 非广义 R 可积.

对于多维积分，亦可建立类似于 3.4.1 与 3.4.2 的结果. 但应注意，当 $n \geqslant 2$ 时，n 重广义积分收敛亦即绝对收敛. 因此，在 $\mathbf{R}^n(n \geqslant 2)$ 中，L 积分完全涵盖了 R 积分.

§3.5 Fubini 定理

在 §3.1 中已经指出，若 $f(x,y)$ 是矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的连续实函数，则有公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

公式(1)用于积分互换颇有价值，但它要求 D 是有限矩形及 f 连续都过于苛刻. 在 R 积分的框架内，对以上结果虽可作一定改进，但总不免要用到某些难以验证的条件. 而在 L 积分的框架内，本节所要介绍的 Fubini 定理从根本上解决了上述问题.

为将公式(1)推广于更一般的情况，自然应以一个抽象的"矩形"$Z=X\times Y$ 替代(1)中的 D，此处 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 与 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 是两个测度空间. 问题是 Z 上能否定义某个测度 λ，使得 λ 与 μ,ν 的关系就如同

面积与长度的关系一样？下面的定理回答了这一问题. 为叙述方便起见，称形如 $A\times B(A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B})$ 的集为**可测矩形**，其全体记作 $\mathscr{R}$.

3.5.1 定理 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 与 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 是两个 σ-有限测度空间，$Z=X\times Y$，$\mathscr{C}$ 是由 $\mathscr{R}$ 生成的 σ-代数，则存在唯一定义于 $\mathscr{C}$ 上的 σ-有限测度 λ，使得以下条件满足：

(i) $\lambda(A\times B) = \mu A\cdot\nu B(A\times B\in\mathscr{R})$；

(ii) 对任给 $E\in\mathscr{C}$，有

$$\lambda E = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\mathrm{d}\,\nu(y), \tag{2}$$

其中 $E_x,E^y(x\in X,y\in Y)$ 是 E 的**截口**，它们定义为：

$$E_x = \{y:\ (x,y)\in E\},\ E^y = \{x:\ (x,y)\in E\}. \tag{3}$$

称如上的 λ 为 μ 与 ν 的**积测度**，记作 $\lambda=\mu\times\nu$；而称 $(Z,\mathscr{C},\lambda)$ 为 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 与 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 的**积测度空间**.

3.5.1 的证明颇为繁冗，移入下节. 我们更关心的是以下结果.

3.5.2 Fubini 定理 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$，$(Y,\mathscr{B},\nu)$ 与 $(Z,\mathscr{C},\lambda)$ 如 3.5.1，$f\in M(Z)$.

(i) 若 $f\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}\int_Z f\mathrm{d}\lambda &= \int_X \mathrm{d}\mu(x)\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_Y \mathrm{d}\nu(y)\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned} \tag{4}$$

其中的逐次积分(例如第一个)理解为

$$\int_X\left[\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x).$$

(ii) 若 $f\in L^1(Z,\lambda)$，则式(4)成立，且其中两个逐次积分的内层积分分别对 x 与 y 几乎处处存在且有限.

证 如同积分定义(3.1.1)一样，下面采用几个由特殊到一般的递进步骤来证明定理. 为书写简便起见，下面分别将 $\mathrm{d}\mu(x)$ 与 $\mathrm{d}\nu(y)$ 写作 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$. 显然只需证式(4)中的第一个等号成立，即证

$$\int_Z f\mathrm{d}\lambda = \int_X \mathrm{d}x\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{5}$$

1° 设 $f=\chi_E, E\in\mathscr{C}$，则由式(2)有

$$\int_Z f\mathrm{d}\lambda = \lambda E = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_X \mathrm{d}x \int_Y f(x,y)\mathrm{d}y.$$

由此进而推出，当 $f\in S^+(Z)$ 时式(5)也成立.

2° 设 $f\in M^+(Z)$. 取 Z 上的非负简单函数列 $\{\varphi_n\}$，使 $\varphi_n\uparrow f$ $(n\to\infty)$，则由 Levi 定理及已证的 1° 有

$$\int_Z f\mathrm{d}\lambda = \lim_n \int_Z \varphi_n\,\mathrm{d}\lambda$$
$$= \lim_n \int_X \mathrm{d}x \int_Y \varphi_n(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_X \left[\lim_n \int_Y \varphi_n(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_X \mathrm{d}x\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y.$$

以上演算自动显示出 $\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$ 是 x 的可测函数.

3° 设 $f\in L^1(Z,\lambda)$，则由已证的 2° 有

$$\int_Z f\mathrm{d}\lambda = \int_Z f^+\,\mathrm{d}\lambda - \int_Z f^-\,\mathrm{d}\lambda$$
$$= \int_Z \mathrm{d}x\int_Y f^+\,\mathrm{d}y - \int_X \mathrm{d}x \int_Y f^-\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_X \left(\int_Y f^+\,\mathrm{d}y - \int_Y f^-\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_X \mathrm{d}x\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y.$$

因

$$\varphi^{\pm}(x) = \int_Y f^{\pm}(x,y)\mathrm{d}y$$

在 X 上对 μ 可积，故 $\varphi^{\pm}(x)$ 在 X 上几乎处处有限(3.2.3)，从而积

分

$$\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y$$

对 x 几乎处处存在且有限. □

若以 m_k 记 k 维 Lebesgue 测度，则 $m_k\times m_l$ 并不等于 m_{k+l}. 但可证明，$m_k\times m_l$ 的完备化(参看 2.2.4)正好与 m_{k+l} 一致. 因此，可将 3.5.2 用到公式(1)得出：

3.5.3 推论 设 $D=(a,b)\times(c,d)$ 是有限或无限矩形，$f(x,y)$ 是 D 上的可测函数. 若 $f\geqslant 0$ 或 $f\in L^1(D)$，则式(1)成立，其中左端看作对 2 维 Lebesgue 测度的积分.

应用 Fubini 定理是非常方便的. 首先，在具体问题中 f 的可测性通常不成问题. 其次，若 $f\geqslant 0$，则应用公式(4)(或(1))时根本无需验证任何条件，例如完全不必考虑可积性. 若 f 不是非负函数，则可预先利用

$$\begin{aligned}\int_Z |f|\mathrm{d}\lambda &= \int_X \mathrm{d}\mu(x)\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_Y \mathrm{d}\nu(y)\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

判定 f 可积，然后再用公式(4). 试看一些实例.

例 1 求 $I=\int_0^\infty \frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})\sin x\,\mathrm{d}x, 0<a<b$.

解 形式地演算得出：

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\int_b^a\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{e}^{-xy}\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^\infty \sin x\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\\ &\overset{(?)}{=} \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \arctan b - \arctan a.\end{aligned}$$

为说明积分换序的合理性，需验证 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}\sin x$ 在矩形 $D=$

$(0,\infty)\times(a,b)$ 上可积，而这由

$$\begin{aligned}&\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{\infty} |\mathrm{e}^{-xy}\sin x|\mathrm{d}x\\ \leqslant\ &\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\\ =\ &\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln\frac{b}{a}<\infty\end{aligned}$$

得出.

如同§3.3中例 2 一样，表面上看，上例纯粹是一个初等微积分学问题. 但若不用 Fubini 定理，则不易说清积分换序的理由.

例 2 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积，则

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

证 化为 $[0,1]\times[0,1]$ 上的积分，然后用 Fubini 定理：

$$\begin{aligned}\text{左端}&=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \chi_{[0,x]}(y)f(x,y)\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \chi_{[0,x]}(y)f(x,y)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=\text{右端}.\end{aligned}$$

如例 2 所显示的，Fubini 定理为证明积分公式提供了一种简便而巧妙的方法. 读者不妨自己找一些应用的例子.

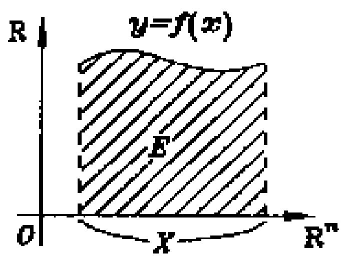


图 3-4

Fubini 定理可用来得出 L 积分的几何解释，这一解释与 R 积分的几何意义恰相对应. 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 可测，$f: X\to[0,\infty)$，

$$E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^{n+1}:\ x\in X,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

是 f 的下方图形（图 3-4，参看§1.5(1)）. 若 f 可测，则有序列 $\{\varphi_k\}\subset S^+(X)$：$\varphi_k\uparrow f(k\to\infty)$. φ_k 的下方图形 E_k 构成一升列且

$E=\bigcup E_k$. 易见 E_k 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中可测，因而 E 亦在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中可测. 反之，若 E 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中可测，则由 Fubini 定理，E 的 $n+1$ 维 Lebesgue 测度 mE 可计算如下：

$$\begin{aligned} mE &= \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}} \chi_E(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_X \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} \mathrm{d}y = \int_X f(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$f(x)$ 必定在 X 上可测. 这就得到：

3.5.4 命题 设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 可测，$f: X \to [0,\infty)$. 则 f 可测的充要条件是 f 的下方图形 E 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中可测；当 f 可测时有

$$mE = \int_X f(x)\mathrm{d}x.$$

最后，我们用 Fubini 定理导出关于二重级数的相应结果. 设 μ 是 $\mathbf{N}$ 上的计数测度，则易见 $\mu \times \mu$（依 3.5.1）恰为 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 上的计数测度. 设 $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$，$f(m,n) = a_{mn}$，则 $f \in L^1(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \mu \times \mu) \Leftrightarrow \sum\limits_{m,n} |a_{mn}| < \infty$（参看 §3.2 例 1）. 于是直接由 3.5.2 得出：

3.5.5 命题 若 $\sum\limits_{m,n} |a_{mn}| < \infty$ 或 $a_{mn} \geqslant 0 (m,n = 1,2,\cdots)$，则

$$\sum_{m,n} a_{mn} = \sum_m \sum_n a_{mn} = \sum_n \sum_m a_{mn}.$$

*§3.6 某些基本结论的证明

现在补上定理 3.2.1 与 3.5.1 的证明. 虽然跳过本节对于后面的学习并无直接影响，但本节所用的方法颇具参考价值，倘能细加体会，必将从中受益.

3.2.1 之证 沿用 §3.2 中的记号；设 $X = \bigcup A_n$，$A_n (n = 1,2,\cdots)$ 是互不相交的可测集. 与积分定义（3.1.1）的形式相对应，以下证明也分为三个递进的步骤.

1° 设 $f,g\in S^+(X)$，α,β 是非负实数. 不妨设 $f=\sum\alpha_i\chi_{e_i}$，$g=\sum\beta_i\chi_{e_i}$，$\alpha_i,\beta_i\geqslant 0$，$e_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 X 中互不相交的可测集. 依§3.1(2)，有

$$\begin{aligned}\int_X(\alpha f+\beta g)&=\int_X\sum_i(\alpha\alpha_i+\beta\beta_i)\chi_{e_i}\\&=\sum_i(\alpha\alpha_i+\beta\beta_i)\mu e_i\\&=\alpha\sum_i\alpha_i\mu e_i+\beta\sum_i\beta_i\mu e_i\\&=\alpha\int_X f+\beta\int_X g;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_X f&=\sum_i\alpha_i\mu e_i=\sum_i\alpha_i\sum_n\mu(e_i\cap A_n)\\&=\sum_n\sum_i\alpha_i\mu(e_i\cap A_n)\\&=\sum_n\int_{A_n}f.\end{aligned}$$

若 $f\leqslant g$，则可设 $\alpha_i\leqslant\beta_i(1\leqslant i\leqslant n)$，于是

$$\int_X f=\sum_i\alpha_i\mu e_i\leqslant\sum_i\beta_i\mu e_i=\int_X g.$$

若 $A\subset X$，$\mu A=0$，则

$$\begin{aligned}\int_A f&=\int_X f\chi_A=\int_X\sum_i\alpha_i\chi_{A\cap e_i}\\&=\sum_i\alpha_i\mu(A\cap e_i)=0.\end{aligned}$$

在转向下一步之前，补入一个中间结果：

引理 若 $\varphi_n\in S^+(X)(n=1,2,\cdots)$，$\varphi_n\uparrow f$，则

$$\lim_n\int_X\varphi_n=\int_X f.$$

引理的证明如同 Levi 定理(3.3.1)一样. 实际上，引理正是 Levi 定理的特殊情况. 但此处不能直接用 Levi 定理，因它的证明用到

3.2.1!

2°　设 $f,g\in M^+(X)$，α,β 是非负实数. 取 $\varphi_n,\psi_n\in S^+(X)(n=1,2,\cdots)$，使 $\varphi_n\uparrow f$ 且 $\psi_n\uparrow g$(2.3.6)，则由上述引理及已证的 1° 有

$$\begin{aligned}\int_X(\alpha f+\beta g)&=\lim_n\int_X(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n)\\&=\lim_n\left(\alpha\int_X\varphi_n+\beta\int_X\psi_n\right)\\&=\alpha\int_X f+\beta\int_X g;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_X f&=\lim_n\int_X\varphi_n=\lim_n\sum_k\int_{A_k}\varphi_n\\&=\sum_k\lim_n\int_{A_k}\varphi_n=\sum_k\int_{A_k}f\text{①}.\end{aligned}$$

若 $f\leqslant g$，则 $\varphi_n\leqslant g$，$\int_X\varphi_n\leqslant\int_X g$，于是

$$\int_X f=\lim_n\int_X\varphi_n\leqslant\int_X g.$$

若 $A\subset X,\mu A=0$，则

$$\begin{aligned}\int_A f&=\int_X f\chi_A=\lim_n\int_X\varphi_n\chi_A\\&=\lim_n\int_A\varphi_n=0.\end{aligned}$$

3°　设 $f,g\in L^1(X)$. 令 $h=f+g$，则

$$f^++g^++h^-=f^-+g^-+h^+.$$

由已证的 2° 有

$$\int_X f^++\int_X g^++\int_X h^-=\int_X f^-+\int_X g^-+\int_X h^+.$$

因上式中各积分均有限，故可移项得

$$\int_X h^+-\int_X h^-=\int_X f^+-\int_X f^-+\int_X g^+-\int_X g^-,$$

① 若 $x_{nk}(n,k=1,2,\cdots)$ 非负且对 n 单调增，则 $\lim_n\sum_k x_{nk}=\sum_k\lim_n x_{nk}$. 这一结论无疑蕴涵于 Levi 定理，但它亦容易用数学分析的方法直接证明.

即

$$\int_X (f+g) = \int_X h = \int_X f + \int_X g. \tag{1}$$

若 $\alpha > 0$，则 $(\alpha f)^{\pm} = \alpha f^{\pm}$，于是

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f &= \int_X (\alpha f)^+ - \int_X (\alpha f)^- \\ &= \int_X \alpha f^+ - \int_X \alpha f^- \\ &= \alpha\left(\int_X f^+ - \int_X f^-\right) = \alpha \int_X f.\end{aligned} \tag{2}$$

其次，由 $f^- = (-f)^+$ 有

$$\begin{aligned}\int_X (-f) &= \int_X (-f)^+ - \int_X (-f)^- \\ &= \int_X f^- - \int_X f^+ = -\int_X f.\end{aligned} \tag{3}$$

结合(1)～(3)得出积分的线性性.

其次，只要 $\int_X f$ 存在，就有

$$\begin{aligned}\int_X f &= \int_X f^+ - \int_X f^- \\ &= \sum_n \int_{A_n} f^+ - \sum_n \int_{A_n} f^- \\ &= \sum_n \left(\int_{A_n} f^+ - \int_{A_n} f^-\right) = \sum_n \int_{A_n} f.\end{aligned}$$

当 $\int_X f$ 与 $\int_X g$ 存在，$f \leqslant g$ 时，从 $f^+ \leqslant g^+$ 与 $f^- \geqslant g^-$ 推出

$$\begin{aligned}\int_X f &= \int_X f^+ - \int_X f^- \\ &\leqslant \int_X g^+ - \int_X g^- = \int_X g.\end{aligned}$$

若 $A \subset X$，$\mu A = 0$，则

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = 0.$$

至此，3.2.1 证完. □

3.5.1 之证　沿用 §3.5 中的记号.

1°　证每个 $E\in\mathscr{C}$ 的截口皆可测. 令

$$\mathscr{E}=\{E\subset Z:E\text{ 的截口皆可测}\},$$

只需证 $\mathscr{C}\subset\mathscr{E}$. 若 $A\times B$ 是可测矩形，则其截口为 A,B 或 $\varnothing$，因而 $A\times B\in\mathscr{E}$，故有 $\mathscr{R}\subset\mathscr{E}$. 若 $E,E_n\in\mathscr{E}(n=1,2,\cdots)$，$x\in X,y\in Y$，则

$$(\bigcup_n E_n)_x=\bigcup_n(E_n)_x\in\mathscr{B},\quad (E^c)_x=(E_x)^c\in\mathscr{B};$$

同理 $(\bigcup E_n)^y,(E^c)^y\in\mathscr{A}$. 故 $\bigcup E_n,E^c\in\mathscr{E}$. 可见 $\mathscr{E}$ 为 σ-代数，因此 $\mathscr{C}\subset\mathscr{E}$.

2°　引入以下概念：设 $\mathscr{S}\subset 2^X$，当 $\{A_n\}\subset\mathscr{S}$ 为单调列时恒有 $\lim\limits_n A_n\in\mathscr{S}$，则称 $\mathscr{S}$ 为**单调类**. 显然 σ-代数是单调类；若一集代数同时是单调类，则它必为 σ-代数.

3°　任给 $E\in\mathscr{C}$，今证

$$\int_X\nu(E_x)\mathrm{d}x=\int_Y\mu(E^y)\mathrm{d}y,\tag{4}$$

其中 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $\mathrm{d}\mu(x)$ 与 $\mathrm{d}\nu(y)$ 的简写.

首先设 $\mu X<\infty,\nu Y<\infty$. 以 $\mathscr{F}$ 记使(4)成立的集 $E\subset Z$ 之全体，只要证 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$. 以 $\mathscr{S}$ 记 $\mathscr{R}$ 生成的代数，以 $\mathscr{T}$ 记包含 $\mathscr{S}$ 的所有单调类之交(即 $\mathscr{S}$ 生成的单调类). 若 $A\times B\in\mathscr{R}$，则易见

$$\int_X\nu(A\times B)_x\mathrm{d}x=\mu A\cdot\nu B=\int_Y\mu(A\times B)^y\mathrm{d}y,$$

故 $A\times B\in\mathscr{F}$. 可见 $\mathscr{R}\subset\mathscr{F}$. 易见每个 $E\in\mathscr{S}$ 可表为有限个互不相交的可测矩形之并，而 $\mathscr{F}$ 对有限不交并运算封闭，故 $\mathscr{S}\subset\mathscr{F}$. 若 $\{E_n\}\subset\mathscr{F}$ 为升列，则由 Levi 定理有

$$\begin{aligned}\int_X\nu(\bigcup E_n)_x\mathrm{d}x&=\int_X\lim_n\nu(E_n)_x\mathrm{d}x\\&=\lim_n\int_X\nu(E_n)_x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \lim_n \int_Y \mu(E_n)^y \mathrm{d}y$$

$$= \int_Y \mu(\bigcup_n E_n)^y \mathrm{d}y,$$

故$\bigcup E_n \in \mathscr{F}$. 类似地，当$\{E_n\} \subset \mathscr{F}$为降列时有$\bigcap B_n \in \mathscr{F}$. 可见$\mathscr{F}$是单调类，因此$\mathscr{T} \subset \mathscr{F}$. 于是只要证$\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$，为此又只要证$\mathscr{T}$是一个代数（因而必为$\sigma$-代数）. 任给$E \in \mathscr{T}$，令

$$\mathscr{T}_E = \{F \in \mathscr{T} : E \backslash F, F \backslash E, E \cap F \in \mathscr{T}\}.$$

显然$E, \varnothing \in \mathscr{T}_E$；$E \in \mathscr{T}_F \Rightarrow F \in \mathscr{T}_E$；$\mathscr{T}_E$为单调类. 若$E \in \mathscr{S}$，则必$\mathscr{S} \subset \mathscr{T}_E$，从而$\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_E$. 这又推出：任给$E \in \mathscr{T}$，有$\mathscr{S} \subset \mathscr{T}_E$，从而$\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_E$. 这表明$\mathscr{T}$是一个代数.

若$\mu X = \infty$或$\nu Y = \infty$，则可取互不相交的$A_n \times B_n \in \mathscr{R}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，使

$$Z = \bigcup (A_n \times B_n), \mu A_n < \infty, \nu B_n < \infty.$$

任给$E \in \mathscr{C}$，令$E_n = E \cap (A_n \times B_n)$，利用上段所证有

$$\begin{aligned} \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}x &= \int_X \sum_n \nu(E_n)_x \mathrm{d}x \\ &= \sum_n \int_X \nu(E_n)_x \mathrm{d}x \\ &= \sum_n \int_Y \mu(E_n)^y \mathrm{d}y \\ &= \int_Y \mu(E^y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

4° 任给$E \in \mathscr{C}$，令

$$\lambda E = \int_X \nu(E_x)\mathrm{d}x.$$

则λ已满足 3.5.1 之条件(ii). 其次，易验知λ是一个σ-有限测度，且满足 3.5.1 之条件(i). 于是 3.5.1 得证. □

评　注

1. Lebesgue 发表于 1902 年的经典性论文《积分、长度与面积》，被公认为是现代积分论的奠基性工作. 其后十年，一批数学家广泛发展了 Lebesgue 的工作，本章的许多结果就是这一时期得到的. 特别，Lebesgue 本人证明了最重要的控制收敛定理(3.3.4)，并由它导出了单调收敛定理(即 3.3.1，Lebesgue 考虑了 f 可积的情况；f 不可积的情况由 Levi 于 1906 年得出). 建立与 R 积分联系的精采结果(3.4.1)也属于 Lebesgue. 稍后，Lebesgue 与 Radon 等人相继拓广了测度概念. Fréchet 在 1915 年前后的工作开创了一般测度空间中的积分论. 现代积分论的基本框架至 50 年代已大体形成.

2. 导入积分有两条基本的路线. 其一是从一给定的测度出发，直接定义关于该测度的积分，如本章所作的. 至于所用测度的构成，则是在定义积分之前应预先完成的. 因此，这种导入法要求一个较高的起点. 另一路线是利用已知的积分(如 R 积分)，首先在一较小的函数类(如连续函数类)上定义出一个"正线性泛函"，然后将它扩张到更大的函数类上去，从而获得所要求的测度与积分. 英国数学家 Daniell(1889—1946)发表于 1918 年的工作首创了这一方法. 这一导入法所要求的起点较低，且能同时获得测度的构成，确有优越之处，因而被一部分实变函数教材所采用(参看[8]). 将积分视为一定线性泛函的扩张的观点，在现代数学中已被普遍接受，且确有启发性. 但从入门教材所要求的简捷性这一标准来衡量，本书所选择的导入法看来是更适当的.

3. 在基于测度导入积分的各种著作中，导入的具体方法仍有较大的差异. 共同遵循的原则是，确定一个由特殊到一般的递进阶梯，但具体的选择则可能各有不同. 本书的选择是"$S^+(X) \to M^+(X) \to L^1(X)$"这一"三步"模式，这似乎是一条最简捷的路线，已被近年出版的大多数中外实分析著作所采用. 其他选择的例子如首

先考虑有界可测函数的积分,然后进至有界集上的无界可测函数的积分,最后到一般可测函数的积分.这种作法可能更易联想到 R 积分的展开路线,但从理论形式上看则未能达到应用的简洁.况且,过于套用 R 积分的模式是不可取的,那只会掩盖 L 积分的优点.将 R 积分中的定积分与重积分、常义积分与广义积分熔于一炉,从而达到高度的统一,正是 L 积分的优点之一.

4.　设 $\mu X < \infty$, f 是 X 上的有界可测函数.设 $A \leqslant f(x) < B$,对区间 $[A,B]$ 作分划

$$A = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = B.$$

令 $e_i = X(y_{i-1} \leqslant f < y_i)$,则 $e_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是互不相交的可测集,且 $X = \bigcup e_i$.作积分和(与 Riemann 和对照) $S = \sum y_i \mu e_i$,则容易证明

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{\lambda \to 0} S,$$

其中 $\lambda = \max\limits_i(y_i - y_{i-1})$.上式可用作积分 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 的定义.这种形式的定义借鉴了 R 积分的导入法,但它对 X 进行分划的原则与 R 积分定义截然不同.如 Lebesgue 所说的,当你数一堆钱币时,可将币值相同的钱币归入同一堆,分别计数后再总计起来.Lebesgue 当初正是在这一思想启发下形成他的积分定义的.从理论构架简洁考虑,今天已不宜沿用 Lebesgue 的原始定义,但他的思想仍然不失启发性.

5.　如本章中提到的,能对连续性很差的函数求积分,是 L 积分优于 R 积分的主要理由之一.这一理由为所有实变函数教科书所强调,从逻辑上说这当然没什么疑问.但对于初学者则可能造成一种误解,以为 L 积分专门用来对付“坏函数”,而“好函数”是属于 R 积分应用范围的.既然在许多具体问题中碰到“好函数”的机会或许更多,那么 R 积分就比 L 积分更实用了.对于持这种看法的人,应当告诉他:首先,即使一个问题表面上只涉及 R 积分,也可能在 R 积分的框架内无从求解或者解法不易,必须求助于更强有力的 L 积分论.

本章有意给出了不少这种类型的例子(参看§3.2 例1,2,§3.3 例2,3,§3.4 例1,2,§3.5 例1,2).其次,许多问题的出发点及最终解答可能只涉及"好函数",但其解决过程所出现的函数则未必"很好"或者"好坏难辨",一个仅适用于"好函数"的工具(如R积分)显然是不够用的,而L积分则有大得多的施展力量的余地.从根本上说,读者须认识到,L积分的价值主要不取决于它所处理函数的"好坏",而取决于它所带来的简化及它处理复杂问题的效力.更有说服力的例子散布在数学的许多领域,非本书所能尽其详,读者在后续课程中将陆续接触到.

6. 本章的中心结果无疑是积分收敛定理,尤其是控制收敛定理(3.3.4).关于积分收敛定理的一般提法如下:设 $f, f_n \in L^1(X)$ $(n = 1,2,\cdots)$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 应对序列 $\{f_n\}$ 附加什么条件,才使得对任何可测集 $A \subset X$ 有

$$\lim_n \int_A f_n \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu? \qquad (*)$$

3.3.4 给出了一个充分条件,即 $\{f_n\}$ 有一控制函数 $g \in L^1$. 一个属于 Vitali 的结果完全解决了上述问题:使($*$)成立的充分必要条件是 $\{f_n\}$ 有等度的绝对连续积分,即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $e \subset X$, $\mu e < \delta$ 时,对任何 n 有 $\left|\int_e f_n \mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$(参看 3.2.8 及[7,p.175]).

习 题 A

1. 证明 3.1.2.

2. 设 μ 如 §2.2 中例 3, $f: X \to \mathbf{R}$, 求 $\int_X f \mathrm{d}\mu$.

3. 设 $f \in L^1(X)$, 则 $\mu X(|f| \geqslant n) \to 0 (n \to \infty)$.

4. 设 $f, g, g - f \in L^1(X)$, $\varphi \in M(X)$, $f \leqslant \varphi \leqslant g$, 则 $\varphi \in L^1$.

5. 设 $f, g \in L^1(X)$, 则 $f = g$, a.e. $\Leftrightarrow$ 对每个可测集 $A \subset X$ 有 $\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A g \mathrm{d}\mu$.

6. 设 $f \in M(X)$，对任何可测集 $A \subset X$ 有 $\int_A f\mathrm{d}\mu \geqslant 0$，则 $f \geqslant 0$，a.e..

7. 证明 3.2.6.

8. 设 $f \in L^1(X)$，对 X 上任何有界可测函数 g 有 $\int_X fg\mathrm{d}\mu = 0$，则 $f = 0$，a.e..

9. 设 $f \in L^1(X)$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists A \subset X$：$\mu A < \infty$，$\int_{A^c} |f|\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

10. 设 $\mu X < \infty$，$f \in M^+(X)$，$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n \to \infty$，$\delta = \max_k(y_k - y_{k-1})$，则 $\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{\delta \to 0} \sum y_n \mu X(y_{n-1} \leqslant f < y_n)$.

11. 设 $\mu X < \infty$，$A_i \subset X$ 可测 $(1 \leqslant i \leqslant n)$，每个 $x \in X$ 至少属于 q 个 A_i，则某个 $\mu A_i \geqslant (q/n)\mu X$.

12. 设在 Cantor 集 P 上 $f(x) = 0$，在 P 的长为 3^{-n} 的余区间上 $f(x) = n$，求 $\int_0^1 f\mathrm{d}m$.

13. 设 $f \in L^1(\mathbf{R})$，$f(0) = 0$，f 在 $x = 0$ 可微，则 $x^{-1}f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可积.

14. 设 $f \in L^1[0,\infty)$ 一致连续，则 $f(x) \to 0\ (x \to \infty)$.

15. 设 μ 是 X 上的计数测度，$f \in L^1(\mu)$，则有可数集 $\{x_n\} \subset X$，使 $\int_X f\mathrm{d}\mu = \sum f(x_n)$.

16. 设 $f_n \in M(X)$，$g \in L^1$，$g \leqslant f_n \uparrow f$ 或 $g \geqslant f_n \downarrow f$，则 $\int_X f_n\mathrm{d}\mu \to \int_X f\mathrm{d}\mu$ $(n \to \infty)$.

17. 设 $A_n \subset X$ 可测 $(n = 1,2,\cdots)$，$\sum \mu A_n < \infty$，则几乎每个 x 至多属于有限个 A_n.

18. 设 $A_n \subset X$ 可测 $(n = 1,2,\cdots)$，$B = \{x \in X：x$ 至少属于 k 个 $A_n\}$，则 $\mu B \leqslant k^{-1} \sum \mu A_n$.

19. 求 $\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}x\ (p > -1)$.

20. 设 $f_n \in M(X)$，若 $f_n \geqslant g \in L^1$，则 $\int_X \varliminf_n f_n\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_n \int_X f_n\mathrm{d}\mu$；若 $f_n \leqslant g \in L^1$，则 $\int_X \varlimsup_n f_n\mathrm{d}\mu \geqslant \varlimsup_n \int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

21. 设 $f_n \geqslant 0$，$f_n \xrightarrow{\mu} f$，则 $\int_X f\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_n \int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

22. 设 $f_n \to f$，a.e. 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，$\int_X |f_n|\mathrm{d}\mu \leqslant \mathrm{const}$，则 $f \in L^1$.

23.　设 $\sum\int_X |f_n|\mathrm{d}\mu < \infty$，则 $\int_X \sum f_n \mathrm{d}\mu = \sum\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

24.　设 $0 < a < b, f_n(x) = a\mathrm{e}^{-nax} - b\mathrm{e}^{-nbx}(n = 1,2,\cdots)$，验证 $\sum\int_0^{\infty} f_n\mathrm{d}m \neq \int_0^{\infty}\sum f_n\mathrm{d}m$，且 $\sum\int_0^{\infty}|f_n|\mathrm{d}m = \infty$.

25.　求 $\lim\limits_n\int_0^{\infty}\dfrac{\sin(x/n)}{[1+(x/n)]^n}\mathrm{d}x$.

26.　求 $\lim\limits_n\int_0^{\infty}\dfrac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$.

27.　求 $\lim\limits_n\int_0^{\infty}\dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x$.

28.　求 $\lim\limits_n\int_0^{\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x$.

29.　求 $\lim\limits_n\int_0^{\infty}\left(nx+\dfrac{1}{x}\right)^{-n}\mathrm{d}x$.

30.　求 $\lim\limits_n\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$.

31.　$\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{e^x-a}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^{n-1}}{n^2+1}\ (|a|\leqslant 1)$.

32.　设 $\mu X < \infty, f\in M^1(X)$，$\int_X f^n\mathrm{d}\mu = c\ (n = 1,2,\cdots)$，则 $f = \chi_A$，a. e..

33.　设 $0 < \alpha < \beta, x^{\alpha}f(x), x^{\beta}f(x)\in L^1[0,\infty)$，则 $\varphi(s) = \int_0^{\infty} x^s f(x)\mathrm{d}x$ 在(α,β) 内连续.

34.　求 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x(\alpha > 1)$.

35.　求 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos\alpha x\mathrm{d}x$.

36.　设 $f, f_n\in L^1(X)$，$A, A_n\subset X$ 可测$(n = 1,2,\cdots)$，$\mu(A\Delta A_n)\to 0$，则 $\int_{A_n} f_n\mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu$.

37.　设 f, g 在 $[a,b]$ 上 R 可积，在$[a,b]$的某稠子集上 $f = g$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

38.　设 f 在 $[a,b]$ 上有界，其间断点集 D 只有可数个极限点，则 f 在 $[a,b]$ 上 R 可积.

39.　设 $f_n(n = 1,2,\cdots)$在 $[a,b]$ 上 R 可积，$f_n \rightrightarrows f$，则 f 在 $[a,b]$ 上 R 可

积.

40. 设 $\alpha,\beta>0$,研究函数 $f(x)=x^{-\alpha}\sin x^{-\beta}$在 $[0,1]$ 上的可积性.

41. 设 X,Y 如 3.5.1,$f\in L^1(X)$,$g\in L^1(Y)$,则

$$\int_{X\times Y}f(x)g(y)\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int_X f\mathrm{d}\mu\int_Y g\mathrm{d}\nu.$$

42. 设 $f,g\in M(X)$,$\mu X<\infty$,则 $f(x)+g(y)\in L^1(\mu\times\mu)\Leftrightarrow f,g\in L^1(\mu)$.

43. 求 $\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2})\frac{\mathrm{d}x}{x}$ $(0<a<b)$.

44. 设 $f\in L^1[0,a]$,$g(x)=\int_x^a\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$,则$\int_0^a g\mathrm{d}m=\int_0^a f\mathrm{d}m$.

45. 设 $f\in L^1[a,b]$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

46. 设 $f\in L^1[a,b]$,则

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{d}y\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_a^b(t-a)(b-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

47. 设 $f,g\in L^1[a,b]$,$F(x)=\int_a^x f\mathrm{d}m$,$G(x)=\int_a^x g\mathrm{d}m$,则

$$\int_a^b Fg\mathrm{d}m=FG\Big|_a^b-\int_a^b fG\mathrm{d}m.$$

48. 设当 xy 为有理数时 $f(x,y)=0$,否则 $f(x,y)=1$,求

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

49. 设 μ 是 $\mathbf{N}$ 上的计数测度,$f(n,n)=-f(n+1,n)=1$ $(n\in\mathbf{N})$,对其他$(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 有 $f(m,n)=0$.则

$$\sum_m\sum_n f(m,n)\neq\sum_n\sum_m f(m,n),\quad\sum_{m,n}|f(m,n)|=\infty.$$

50. 设 $J=[0,1]$,$E\subset J\times J$,$\forall\,x\in J$:E_x 与 $J\backslash E^x$ 均可数,则 E 关于 $m\times m$不可测.

习　题　B

51. 设 $\mu X<\infty$,$f\in M(X)$,则 $f\in L^1\Leftrightarrow\sum_{n=1}^\infty\mu X(|f|\geqslant n)<\infty$. $\mu X=\infty$ 时如何?

52. 设 $\mu X<\infty$,$f\in M(X)$,则 $f\in L^1\Leftrightarrow\sum_{n=1}^\infty 2^n\mu X(|f|\geqslant 2^n)<\infty$.

53. 设 $\mu X < \infty$，$f \in M(X)$，有 $K > 0$，$\alpha > 1$，使得 $\forall \lambda > 0$：$\mu X(|f| \geqslant \lambda) \leqslant K\lambda^{-\alpha}$，则 $f \in L^1$.

54. 设 $f \in L^1(X)$，则 $n\mu X(|f| \geqslant n) \to 0 (n \to \infty)$.

55. 设 $0 < f \in L^1(X)$，$0 < q \leqslant \mu X < \infty$，则 $\inf\limits_{\mu A \geqslant q} \int_A f\mathrm{d}\mu > 0$.

56. 设 $f \in L^1(\mathbf{R})$，$\alpha > 0$，则 $n^{-\alpha} f(nx) \to 0$，a.e. $(n \to \infty)$.

57. 设 $f \in L^1[0,1]$，作可测函数 g，使 $gf \in L^1$，$g(0^+) = \infty$.

58. 设 $f, f_n \in L^1(X)$，对每个可测集 $A \subset X$ 有 $\int_A f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A f_{n+1} \mathrm{d}\mu$ $(n = 1,2,\cdots)$，$\int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu$，则 $f_n \to f$，a.e..

59. 设 $f \in L^1(X)$，$F \subset \mathbf{R}$ 是一闭集. 若对每个可测的 $A \subset X$ 有 $\int_A f\mathrm{d}\mu \in F$，则 $f(x) \in F$，a.e..

60. 设 $f_n \in M^+(X)$，$f_n \to f$，a.e.，$f \in L^1$，$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f\mathrm{d}\mu$，则对任何可测集 $A \subset X$ 有 $\int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu$.

61. 设 $f_n \to f$，a.e.，$|f_n| \leqslant g_n \to g$，a.e.，$g_n, g \in L^1$，$\int_X g_n \mathrm{d}\mu \to \int_X g\mathrm{d}\mu$，则 $f \in L^1$ 且 $\int_X |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$.

62. 设 $f, f_n \in L^1(X)$，$f_n \to f$，a.e.，则 $\int_X |f_n - f|\mathrm{d}\mu \to 0 \Leftrightarrow \int_X |f_n| \mathrm{d}\mu \to \int_X |f| \mathrm{d}\mu$.

63. 设 $f_n \in M(X)$，$f_n \to f$，a.e.，$|f_n| \leqslant g \in L^1 (n = 1,2,\cdots)$，则 $f_n \to f$，a.u..

64. 设 $\mu X < \infty$，$f_n \in M(X)$，$|f_n| < \infty$，a.e. $(n = 1,2,\cdots)$，则 $f_n \xrightarrow{\mu} 0 \Leftrightarrow \int_X |f_n|(1 + |f_n|)^{-1} \mathrm{d}\mu \to 0$.

65. 设 $f(x) = x^{-1/2} (0 < x < 1)$，对其他 $x \in \mathbf{R}$ 令 $f(x) = 0$；$\mathbf{Q} = \{r_n : n \in \mathbf{N}\}$，$g(x) = \sum 2^{-n} f(x - r_n)$. 则 $g \in L^1(\mathbf{R})$；g 在任何区间上无界；g^2 在任何区间上不可积.

66. 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 有界，$f(x^+)$ 恒存在，则 f 在任何有限区间上 R 可积.

67. 写出并证明 3.4.1 与 3.4.2 的高维形式.

68. 设 μ 为 σ-有限测度，$f \in M^+(X)$，$\varphi(y) = \mu X(f > y)$，则 $\int_X f\mathrm{d}\mu =$

$\int_0^{\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y$.

69. 设 μ 同上，$f,g\in M^+(X)$，$\varphi(y)=\int_{X(g\geq y)}f\mathrm{d}\mu$，则 $\int_X fg\mathrm{d}\mu=\int_0^{\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y$.

70. 设 $f\in L^1[a,b]$，在 $[a,b]$ 外 $f=0$，$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$，则 $\int_a^b|\varphi(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

第四章　L^p 空间

在上章中我们考察了可积函数类 $L^1(X)$. 本章推进到考察更一般的"p 次可积函数类"$L^p(X)$，但现在着重点不是其中各个函数的积分性质，而是各函数之间的相互关系，尤其是由积分所定义的度量 $\| f-g \|_p (f,g\in L^p(X))$. 依靠这种度量，可以在 $L^p(X)$ 中建立某种类似于 $\mathbf{R}^n$ 的空间结构，从而得到所谓 L^p 空间概念. L^p 空间是沟通实变函数论与现代抽象空间理论的一个重要环节，它在分析学及其他数学分支中的应用极为广泛. 本章的介绍只是初步的，进一步的展开导向对函数空间的深入考察，而这已进入另一个领域，它就是读者将极感兴趣的泛函分析.

本章仍设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是取定的测度空间，涉及测度与积分的记号均依据前两章.

§4.1　L^p 范数与 L^p 收敛

对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，熟知用

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \tag{1}$$

表示 x 的"模长"(见 §1.4(1))，而 $|x-y|$ 表示点 x 与 y 之间的距离. 式(1)自然地推广到 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)$($x$ 权且当作"无穷维空间 $\mathbf{R}^\infty$"中的点)：

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{1/2}. \tag{2}$$

进一步的推广自然是用积分来代替和式(读者当已注意到，在 L 积分的框架内，积分与和式已经统一!)，对于 $f\in M(X)$，定义其"模长"为

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}. \tag{3}$$

注意，当 $X = \mathbf{N}$，μ 为计数测度且 $f(i) = x_i (i \in \mathbf{N})$ 时，(2)，(3)两式一致. 人们进而发现，如果以任意的 $p \in [1,\infty)$ 代替式(3)中的指数 2，将得到一个更具一般性的"模长"概念. 这就导致如下定义.

4.1.1 定义　设 $f \in M(X)$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$. 令

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \inf\limits_{A \subset X, \mu A = 0} \sup\limits_{x \in A^c} |f(x)|, & p = \infty; \end{cases} \tag{4}$$

$$L^p(X) = \{f \in M(X): \|f\|_p < \infty\}. \tag{5}$$

称 $\|f\|_p$ 为 f 的 L^p 范数；称 $L^p(X)(1 \leqslant p < \infty)$ 中的函数为 X 上的 p 次可积函数，而称 $L^\infty(X)$ 中的函数为 X 上的本性有界函数.

$L^p(X)$ 也记作 $L^p(X,\mu)$ 或 L^p.

注　不难验明，对于 $f \in L^\infty(X)$，必有某个零测集 $A \subset X$，使 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A^c} |f(x)|$. 因此，除去一零测集后，$f$ 是有界函数. 将 L^∞ 加入到空间族 $\{L^p: 1 \leqslant p < \infty\}$ 之中有某些好处. 但 L^∞ 较之于 $L^p(p < \infty)$ 确有很大不同，必须小心区别.

空间 $L^p(X)$ 包括了许多特例，其中的常见者列举如下：

1°　任给非空可测集 $X \subset \mathbf{R}^n$，在未加说明时，$L^p(X)$ 总表示空间 $L^p(X,m)$，m 是 n 维 Lebesgue 测度. 若 $X = (a,b) \subset \mathbf{R}$，则 $L^p(X)$ 写作 $L^p(a,b)$. 注意，$L^p(a,b)$ 与 $L^p[a,b]$（若 a,b 有限）不加区别.

2°　若 $X \subset \mathbf{R}^n$ 为有界闭区域，则显然 $C(X) \subset L^\infty(X)$，且对每个 $f \in C(X)$ 有 $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in X} |f(x)|$（参考 1.6.6).

3°　若 μ 是 $\mathbf{N}$ 上的计数测度，则 $L^p(\mathbf{N},\mu)$ 记为 l^p. 对于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots) \in l^p$，依式(4)有

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_n |x_n|^p\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty; \\ \sup\limits_n |x_n|, & p = \infty. \end{cases} \tag{6}$$

下面约定 $1\leqslant p,q\leqslant\infty$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，称 q 为 p 的**共轭指数**. 关于 L^p 范数的以下结果在本章中起基本作用.

4.1.2 Hölder 不等式　对任给 $f\in L^p(X)$，$g\in L^q(X)$，有

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q. \tag{7}$$

证　若 $p=1$，则 $q=\infty$，此时不等式(7)为

$$\int_X|fg|\mathrm{d}\mu\leqslant\|g\|_\infty\int_X|f|\mathrm{d}\mu,$$

它显然成立. 以下设 $1<p<\infty$. 令 $\alpha=1/p$，则 $1/q=1-\alpha$. 首先用微分法建立不等式

$$x^\alpha y^{1-\alpha}\leqslant\alpha x+(1-\alpha)y,\ x,y\geqslant 0. \tag{8}$$

可设 $0<x\leqslant y$，于是(8)相当于

$$\varphi(\lambda)\triangleq\lambda^\alpha-\alpha\lambda+\alpha-1\leqslant 0, \tag{9}$$

其中 $0<\lambda=x/y\leqslant 1$. (9)由 $\varphi'(\lambda)=\alpha(\lambda^{\alpha-1}-1)\geqslant 0(0<\lambda\leqslant 1)$及 $\varphi(1)=0$ 推出.

若 $\|f\|_p=0$，则 $f=0$，a. e. (3. 2. 5(iii))，此时(7)显然成立. 故不妨设 $\|f\|_p\|g\|_q>0$，于是利用不等式(8)得

$$\begin{aligned}\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q}&=\int_X\left(\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}\right)^{1/p}\left(\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right)^{1/q}\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\int_X\left(\frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p}+\frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}\right)\mathrm{d}\mu\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\end{aligned}$$

这表明不等式(7)成立.　□

当 $1<p<\infty$，$f\in L^p(X)$，$g\in L^q(X)$时，由不等式(7)得出：

$$\left|\int_X fg\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\left(\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X|g|^q\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

4.1.3 命题　依通常函数的加法与数乘运算，$L^p(X)$是一向量空间；L^p 范数满足如下"范数公理"：

(i) 齐次性：$\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p$；

(ii) 三角不等式：$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$；

(iii) 正定性：$\|f\|_p \geqslant 0$；$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$, a.e.. 以上 $f, g \in L^p(X)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

证 设 $1 < p < \infty$. 任给 $f, g \in L^p(X)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, 显然 $\alpha f \in L^p$ 且 (i)成立. 其次, 由易验知的不等式

$$|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

得 $f + g \in L^p$, 故 $L^p(X)$ 是向量空间. 由

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \int_X |f||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \|f\|_p \| |f+g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f+g|^{p-1} \|_q \text{(用 4.1.2)}$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q}$$

及 $p-(p/q)=1$ 推出(ii). (iii)是显然的.

当 $p = 1$ 或 ∞ 时, 证明是简单的. □

今后将 $L^p(X)$ 中几乎处处相等的函数不加区别. 这样, 4.1.3 中的"范数公理"(i)～(iii)就与 $\mathbf{R}^n$ 中向量"模长"的性质(见 §1.4)完全类似, 正是这种类似引出一个优美的理论. 我们将 $L^p(X)$ 看作一个与 $\mathbf{R}^n$ 有某种类似的"空间", 将 $f \in L^p(X)$ 看作该空间中的点或向量, 将 $\|f-g\|_p$ 看作"点" f 与 g 之间的"距离", 它自然刻画了 f 与 g 的接近程度. 如同在空间 $\mathbf{R}^n$ 中用距离定义极限一样, 在空间 $L^p(X)$ 中有以下定义:

4.1.4 定义 设 $f, f_n \in L^p(X)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 若 $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$, 则说序列 $\{f_n\}$ 依 L^p 范数收敛于 f, 或简单地说"L^p 收敛于 f", 记作 $f_n \to f(L^p)$. 若 $1 \leqslant p < \infty$, 则称"L^p 收敛"为"p 次平均收敛", 当 $p = 1, 2$ 时分别简称为"平均收敛"与"均方收敛".

由于以上定义形式上与 $\mathbf{R}^n$ 中的极限定义完全相同, $\mathbf{R}^n$ 中极限运算的一些性质自然亦为 L^p 收敛所具有. 例如, L^p 收敛序列必依 L^p 范数有界, 且极限唯一; 若 $f_n \to f(L^p)$, $g_n \to g(L^p)$, 则 $f_n + g_n \to$

$f+g(L^p)$，$\|f_n\|_p\to\|f\|_p$，等等. 这些概不详论.

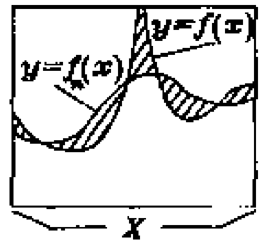


图 4-1

L^1 收敛有明显的直观意义：范数 $\|f_n-f\|_1$ 可理解为如图 4-1 所示的"面积"，它是 f_n 逼近 f 的程度的一种整体刻画. 注意 $\|f_n-f\|_1\to 0$ 并不排除在某些局部 $|f_n(x)-f(x)|$ 可能取很大的值，但这种局部偏离不至大到足以影响整体的接近. 当 $1<p<\infty$ 时，L^p 收敛有类似特征. 至于 L^∞ 收敛，容易证明(留作练习)：$f_n\to f(L^\infty)\Leftrightarrow$ 除去某个零测集后 $f_n\rightrightarrows f$(即$\{f_n\}$"几乎处处一致收敛"于 f，注意与"几乎一致收敛"相区别).

一个自然的问题是：L^p 收敛与 §2.4 中所述的收敛关系如何？若 $1\leqslant p<\infty$，则 L^p 收敛蕴涵测度收敛(请证明！). 但 L^p 收敛与几乎处处收敛之间并无必然联系.

例 1　设 $X=[0,1]$，f_n 依 §2.4 例 3，$1\leqslant p<\infty$. 直接看出 $f_n\to 0(L^p)$，但$\{f_n\}$处处不收敛.

由此看来，L^p 收敛似乎是很弱的. 但下面的例子展示出事情的另一面.

例 2　设 $X=[0,1]$，$f_n=n\chi_{[0,1/n]}(n=1,2,\cdots)$，显然 $f_n\to 0$，a.u.. 但 $\|f_n\|_1=1$；当 $1<p\leqslant\infty$ 时

$$\|f_n\|_p=n^{(p-1)/p}\to\infty\ (n\to\infty).$$

可见，几乎一致收敛(更不必说几乎处处收敛或测度收敛)不足以保证 L^p 收敛.

不过，补充适当附加条件之后，从几乎处处收敛或测度收敛就可推出 L^p 收敛. 下面是 3.3.4 的一个推广.

4.1.5 L^p 控制收敛定理　设 $f,f_n\in M(X)(n=1,2,\cdots)$，$f_n\to f$，a.e. 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$. 若存在 $g\in L^p$，$1\leqslant p<\infty$，使得 $|f_n|\leqslant g$，a.e. $(n=1,2,\cdots)$，则 $f_n\to f(L^p)$.

证 令 $g_n = |f_n - f|^p (n = 1,2,\cdots)$，则 $g_n \in M(X)$，$g_n \to 0$，a.e. 或 $g_n \xrightarrow{\mu} 0$；

$$g_n \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant 2^p g^p, \text{a.e.}.$$

因 $2^p g^p \in L^1$，故由 3.3.4 有

$$\lim_n \| f_n - f \|_p^p = \lim_n \int_X g_n \mathrm{d}\mu = 0,$$

此即 $f_n \to f(L^p)$. □

在 $\mathbf{R}^n$ 中，Cauchy 收敛原理(1.6.1)起基本作用. 值得庆幸的是，在 L^p 空间中有一类似定理.

4.1.6 定理 设序列 $\{f_n\} \subset L^p(X)$ 满足条件

$$\lim_{m,n\to\infty} \| f_m - f_n \|_p = 0, \tag{10}$$

则存在 $f \in L^p(X)$，使 $f_n \to f(L^p)$.

定理所表达的性质称为空间 $L^p(X)$ 的**完备性**.

证 当 $p = \infty$ 时证明不难，留给读者. 下面设 $p < \infty$. 由条件(10)，可取 $n_1 \in \mathbf{N}$，使得

$$\| f_n - f_{n_1} \|_p < 2^{-1} (\forall\, n \geqslant n_1).$$

又可取 $n_2 > n_1$，使得

$$\| f_n - f_{n_2} \|_p < 2^{-2} (\forall\, n \geqslant n_2).$$

如此继续，得到 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，使得

$$\| f_n - f_{n_k} \|_p < 2^{-k} (\forall\, n \geqslant n_k, k = 1,2,\cdots).$$

由此特别有

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_p < 2^{-k} (k = 1,2,\cdots). \tag{11}$$

令 $g_k = |f_{n_{k-1}} - f_{n_k}|$，$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$. 则 $g \in M^+(X)$，

$$\| g \|_p = \left[\int_X \lim_n \left(\sum_{k=1}^n g_k \right)^p \mathrm{d}\mu \right]^{1/p}$$

$$= \lim_n \left[\int_X \left(\sum_{k=1}^n g_k \right)^p \mathrm{d}\mu \right]^{1/p} \quad (\text{用 Levi 定理})$$

$$= \lim_n \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|_p$$

$$\leqslant \lim_n \sum_{k=1}^{n} \| g_k \|_p \quad \text{(用三角不等式)}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty, \quad \text{(用(11))}$$

可见 $g \in L^p$. 因此 $g < \infty$, a. e. (3. 2. 3), 从而级数 $\sum (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ 在 X 上几乎处处收敛. 于是有有限可测函数 f, 使得 $f_{n_k} \to f$, a. e. $(k \to \infty)$.

由条件(10), $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N > 0$, 当 $n, n_k \geqslant N$ 时 $\| f_n - f_{n_k} \|_p < \varepsilon$. 由 Fatou 定理(3. 3. 3), 当 $n \geqslant N$ 时

$$\| f_n - f \|_p^p = \int_X \lim_k | f_n - f_{n_k} |^p \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \varliminf_k \| f_n - f_{n_k} \|_p^p \leqslant \varepsilon^p,$$

故得 $\| f_n - f \|_p \leqslant \varepsilon (\forall\ n \geqslant N)$. 这表明 $f = (f - f_n) + f_n \in L^p$, 且 $\| f_n - f \|_p \to 0 (n \to \infty)$, 即 $f_n \to f (L^p)$. □

若 $f_n \to f(L^p)$, 则显然条件(10)满足. 于是由 4. 1. 6 的证明过程得出:

4. 1. 7 推论　若 $f_n \to f(L^p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $\{f_n\}$ 有子列几乎处处收敛于 f.

以上结论可与 Riesz 定理(2. 4. 2(ii))相对照.

4. 1. 6 是一个有重大意义的结论. 一方面, 它为判定 L^p 收敛提供了一个普遍方法; 同时, 它表明空间 L^p 含有"足够多"的点, 使得其中"本质上应收敛"的序列(即满足条件(10)的序列, 通常称为 Cauchy 列, 参照 § 1. 6 (1)), 都是 L^p 收敛的, 因而不致要到空间以外去寻求极限. 这一理想的结论得以证明, 完全依赖于 L 积分的优势, R 积分则不能起类似的作用, 请看下面的例子.

例 3　以 Γ 记 $[a,b]$ 上 R 可积的函数之全体, 则 Γ 是 $L^1[a,b]$ 的一个向量子空间. 但 Γ 中的 Cauchy 列不一定在 Γ 中 L^1 收敛. 例

如，设 $\mathbf{Q}=\{r_n: n\in\mathbf{N}\}$，取开区间 δ_n，使 $r_n\in\delta_n$ 且 $\sum m\delta_n<\infty$，令 $f_n=\sum_{i=1}^n \chi_{\delta_i}$，$f=\sum_{i=1}^\infty \chi_{\delta_i}$. 则显然 $\{f_n\}\subset\Gamma$，

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_1&=\int_a^b\sum_{i>n}\chi_{\delta_i}\mathrm{d}m\\&\leqslant\sum_{i>n}m\delta_i\to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

可见 $\{f_n\}$ 依 L^1 范数是 Γ 中的 Cauchy 列. 但 $\{f_n\}$ 在 Γ 中不 L^1 收敛. 否则有 $g\in\Gamma$：$f_n\to g(L^1)$，这推出在 $[a,b]$ 上 $f=g$，a.e.. 但 $\forall\ n\in N$，f 必在 $[a,b]$ 的某个子区间上大于 n，这与 g 有界矛盾.

§4.2 L^p 逼近

在本节设 $1\leqslant p<\infty$.

4.2.1 定义 设 $F\subset L^p(X)$. 若 $\forall\ f\in L^p(X)$，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ g\in F$，使得 $\|f-g\|_p<\varepsilon$，则说函数类 F 在 $L^p(X)$ 中稠密，或说每个 $f\in L^p(X)$ 可用 F 中的函数"L^p 逼近".

本节的基本问题是：求得 $L^p(X)$ 的"尽可能小"的子集 F，使 F 在 $L^p(X)$ 中稠密，且 F 中的函数比较简单或具有某些良好性质. 为解决此问题，要用到直接由 4.2.1 推出的以下结论：

1° f 可用 F 中的函数 L^p 逼近相当于：存在序列 $\{f_n\}\subset F$，使得 $f_n\to f(L^p)$.

2° 设 $F_i\subset L^p(X)$，$i=0,1,\cdots,n$，$F_n=L^p(X)$. 若每个 $f\in F_i$ 可用 F_{i-1} 中的函数 L^p 逼近，$i=1,2,\cdots,n$，则 F_0 在 $L^p(X)$ 中稠密，即 L^p 逼近具有"传递性". 鉴于此，常常采用某些递进的步骤来处理 L^p 逼近问题.

3° 设 $F,G\subset L^p(X)$，G 生成向量空间 H（即每个 $f\in H$ 是 G 中元的有限线性组合）. 若每个 $g\in G$ 可用 F 中的函数 L^p 逼近，F 是向量空间，则每个 $h\in H$ 可用 F 中的函数 L^p 逼近，因此当 H 在

$L^p(X)$中稠密时 F 亦在 $L^p(X)$中稠密. 应用此结论时,常常选取"尽可能小"的集 G,以使验证 F 的稠密性变得很简单.

下面是关于 L^p 逼近的几个基本结果.

4.2.2 定理 每个 $f\in L^p(X)$可用简单函数 L^p 逼近.

证 取定 $f\in L^p(X)$. 由 2.3.6,有序列$\{\varphi_n\}\subset S(X)$,使得 $\varphi_n\to f$(处处收敛),且 $|\varphi_n|\leqslant|f|$. 由 4.1.5,立得 $\varphi_n\to f(L^p)$. □

对于一般的测度空间 X,可以说 4.2.2 已经是最好的结果,因在 $L^p(X)$中不再有比简单函数更好的函数类. 但对于较特殊的 X,例如 $X=\mathbf{R}^n$,简单函数类并非总是最理想的,如有时考虑连续函数逼近更为可取. 下面是两个这方面的结果.

4.2.3 定理 设$-\infty<a<b<\infty$,则每个 $f\in L^p[a,b]$可用阶梯函数与连续函数 L^p 逼近.

证 由 4.2.2 及 4.2.1 之后的说明,可设 $f=\chi_A$,$A\subset(a,b)$是可测集.

1° 用阶梯函数逼近 f. $\forall\,\varepsilon>0$,由 2.1.5,有开集 $G\supset A$,使 $m(G\backslash A)<\varepsilon^p/2$,可设 $G\subset(a,b)$. 设 $G=\bigcup\delta_i$,δ_i 是 G 的构成区间. 取 $n\in\mathrm{N}$,使 $\sum\limits_{i>n}m\delta_i<\varepsilon^p/2$. 令 $V=\bigcup\limits_{i\leqslant n}\delta_i$,$g=\chi_V$. 则 g 是阶梯函数,且

$$\begin{aligned}\|f-g\|_p^p&=\int_a^b|\chi_A-\chi_V|^p\mathrm{d}m\\&=m(A\backslash V)+m(V\backslash A)\\&\leqslant m(G\backslash V)+m(G\backslash A)\\&<\frac{\varepsilon^p}{2}+\frac{\varepsilon^p}{2}=\varepsilon^p,\end{aligned}$$

故得 $\|f-g\|_p<\varepsilon$.

2° 用连续函数 L^p 逼近 $f\in L^p(X)$. 由已证的 1°,可设 $f=\chi_\Delta$,$\Delta=(\alpha,\beta)\subset(a,b)$. $\forall\,\varepsilon>0$,作连续函数 g 如下:在$[a,\alpha]\cup[\beta,b]$上 $g(x)=0$;在 $[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]$ 上 $g(x)=1$;在 $[\alpha,\alpha+\varepsilon]$ 与 $[\beta-\varepsilon,\beta]$ 上 g 是线性函数(如图 4-2). 则

$$\|f-g\|_p^p = \int_\alpha^{\alpha-\varepsilon}|f-g|^p\mathrm{d}x + \int_{\beta-\varepsilon}^{\beta}|f-g|^p\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$ □

鉴于连续函数与阶梯函数是相对简单且被充分研究的函数，用它们来逼近 p 次可积函数有重要意义. 4.2.3 可以推广到一般的 $L^p(X)$, $X \subset \mathbf{R}^n$. 此处不拟考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的阶梯函数(尽管这并没有什么原则性困难，有兴趣的读者可以自己考虑)，而只对连续函数逼近建立 4.2.3 的一个推广，所用的方法与 4.2.3 有所不同. 引入记号：

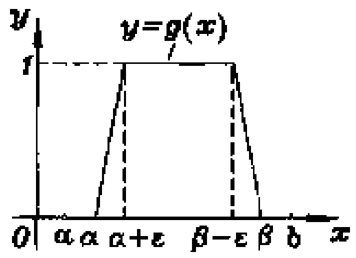


图 4-2

$$C_c(X) = \{f\in C(X):\ 存在紧集 A\subset X, 在 X\backslash A 上 f=0\}. \tag{1}$$

称 $f\in C_c(X)$ 为"有紧支集"的连续函数.

4.2.4 定理 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 可测，则每个 $f\in L^p(X)$ 可用 $C_c(\mathbf{R}^n)$ 中的函数在 X 上 L^p 逼近.

证 如同证 4.3.2 一样，可设 $f=\chi_A$, $A\subset X$, $mA<\infty$. $\forall\,\varepsilon>0$，由 2.1.5 有紧集 F 与开集 G，使 $F\subset A\subset G$，且 $m(G\backslash F)<\varepsilon$. 取开球 $B\supset F$，令 $K=(B\cap G)^c$，则 F 与 K 是互不相交的闭集. 由 2.5.8，有 $g\in C(\mathbf{R}^n)$，使得 $g|F=1$, $g|K=0$，且 $0\leqslant g\leqslant 1$. 显然 $g\in C_c(\mathbf{R}^n)$. 于是由

$$\int_X|f-g|^p\mathrm{d}m\leqslant m(G\backslash F)<\varepsilon$$

得出定理结论. □

逼近定理的价值在于：若要对每个 $f\in L^p(X)$ 证明某个命题 P，则可选取适当的 $F\subset L^p(X)$，使 F 在 $L^p(X)$ 中稠密，且对于 $f\in F$ 容易证明命题 P；然后通过一极限过程，即得出 P 对所有 $f\in L^p(X)$ 成立. 这一方法是如此强有力，它使一些看来不易的问题变得很简单，因而被广泛采用. 试看几个例子.

例 1 设 $f\in L^1[a,b]$，则

$$\lim_{n}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

以上结果称为 **Riemann 引理**，最初是对 R 可积函数 f 证明的，它在 Fourier 分析中起重要作用.

证 1° 设 $f=\chi_\Delta,\Delta=(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，则

$$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \sin nx\mathrm{d}x$$
$$= n^{-1}(\cos n\alpha-\cos n\beta)\to 0(n\to\infty).$$

由此进而推出，(2)对阶梯函数 f 成立.

2° 设 $f\in L^1[a,b]$. $\forall\ \varepsilon>0$，取阶梯函数 g，使 $\|f-g\|_1<\varepsilon/2$ (4.2.2). 取 $N>0$，使

$$\left|\int_a^b g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ (\forall\ n\geqslant N).$$

于是当 $n\geqslant N$ 时有

$$\left|\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\sin nx\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \|f-g\|_1+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

这表明式(2)成立.

读者不妨一试，如果不用 4.2.2，证明式(2)是否容易成功. 在本章习题中读者会看到一些有趣的类似例子.

约定 $f_\tau(x)=f(x+\tau)$. 以下结果有广泛应用.

4.2.5 定理 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，则 $\|f_\tau-f\|_p\to 0(\tau\to 0)$，即

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+\tau)-f(x)|^p\mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

证 1° 首先设 $f\in C_c(\mathbf{R}^n)$. 约定 $B_r=B_r(0)$. 取 $r>0$，使当 $|x|\geqslant r$ 时 $f(x)=0$. $\forall\ \varepsilon>0$，因 f 一致连续(1.6.6)，故有 $\delta\in(0,r)$，使得

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon\ (x\in\mathbf{R}^n,\tau\in B_\delta).$$

于是，当$|\tau|<\delta$时有

$$\|f_\tau-f\|_p^p=\int_{B_{2r}}|f(x+\tau)-f(x)|^p\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\varepsilon^p\cdot mB_{2r}.$$

此处 m 记 n 维 Lebesgue 测度. 这表明式(3)成立.

2° 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$. $\forall\ \varepsilon>0$，取 $g\in C_c(\mathbf{R}^n)$，使 $\|f-g\|_p<\varepsilon/3$ (4.2.4). 由上段所证，有 $\delta>0$，使当$|\tau|<\delta$时 $\|g_\tau-g\|_p<\varepsilon/3$. 于是，当$|\tau|<\delta$时有

$$\|f_\tau-f\|_p\leqslant\|f_\tau-g_\tau\|_p+\|g_\tau-g\|_p+\|g-f\|_p$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

(注意依 3.2.9 有 $\|g_\tau\|_p=\|g\|_p$)，这表明(3)成立. □

若 $f\in L^p[a,b]$，则补充定义 $f(x)=0(x\in\mathbf{R}\backslash[a,b])$，使 $f\in L^p(\mathbf{R})$. 据此，由 4.2.6 得出：

$$\lim_{\tau\to 0}\int_a^b|f(x+\tau)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0. \tag{4}$$

现在利用 4.2.5 给(2)一个新的证法如下：设 $f\in L^1[a,b]$，令

$$I_n=\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x,$$

则

$$-2I_n=2\int_a^b f(x)\sin nx\cos\pi\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\mathbf{R}}f(x)[\sin(nx+\pi)+\sin(nx-\pi)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\mathbf{R}}\left[f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\sin nx\mathrm{d}x.\ (\text{用 } 3.2.9)$$

于是

$$4|I_n|=|2I_n-(-2I_n)|$$
$$\leqslant\int_{\mathbf{R}}\left|f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\mathbf{R}}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\to 0(n\to\infty).$$

现在再回到 L^p 逼近问题. 本节开头提到，求得 $L^p(X)$ 的"尽可能小"的稠密子集是一基本问题. 可数稠密子集自然应被看作"最小"的稠密子集，如果这种子集存在，就说空间 $L^p(X)$ 是可分的.

4.2.6 命题　若存在可数集 $\{\varphi_n\}\subset L^p(X)$，使 $\varphi_n(n=1,2,\cdots)$ 的有限线性组合之全体在 $L^p(X)$ 中稠密，则 $L^p(X)$ 是可分的.

证　由 1.3.8，$\varphi_n(n=1,2,\cdots)$ 的有理系数有限线性组合之全体是一可数集. 取定 $f=\sum_{i=1}^n\alpha_i\varphi_i$，$\alpha_i\in\mathbf{R}(1\leqslant i\leqslant n)$. 取有理数列 $r_{ik}\to\alpha_i(k\to\infty,i=1,2,\cdots,n)$. 令 $f_k=\sum_{i=1}^n r_{ik}\varphi_i$，则

$$\|f_k-f\|_p\leqslant\sum_i|r_{ik}-\alpha_i|\,\|\varphi_i\|_p\to 0(k\to\infty).$$

由此推出 $L^p(X)$ 是可分的. □

应用 4.2.6 可以推出：

1°　$L^p[a,b]$ 是可分的. 事实上，由 Weierstrass 定理，每个 $f\in C[a,b]$ 可用多项式一致逼近，这结合 4.2.3 得出每个 $f\in L^p[a,b]$ 可用多项式 L^p 逼近，这正意味着可数集 $\{x^n:n\geqslant 0\}$ 的有限线性组合之全体在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

进而可以指明，$L^p(\mathbf{R}^n)$ 也是可分的.

2°　l^p 是可分的. 事实上，若令

$$e_n=(0,\cdots 0,\overset{n}{1},0,\cdots),$$

则 $e_n(n=1,2,\cdots)$ 的有限线性组合之全体在 l^p 中稠密.

若 $L^p(X)$ 是可分的，则存在一个序列 $\{f_n\}\subset L^p(X)$，使得每个 $f\in L^p(X)$ 都是 $\{f_n\}$ 的某一子列依 L^p 收敛的极限. 在某种意义上，可以说空间 $L^p(X)$ 是由 $\{f_n\}$"生成的". 这表明空间 $L^p(X)$ 似乎"不过大". 另一方面，完备性意味着空间 $L^p(X)$"足够大"，可分的 L^p 空间则兼有二者，可以说是很"合式"的. 从实际运用的效果来看也确实如此.

本节的内容都限于 $p<\infty$ 的情况. 一般来说，$L^\infty(X)$ 的逼近性质"很坏".

例 2 空间 $L^\infty[0,1]$是不可分的.

证 令 $\varphi_t = \chi_{[0,t]}$,则 $A = \{\varphi_t : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$是不可数集,当 $t,s \in [0,1], t \neq s$ 时 $\|\varphi_t - \varphi_s\|_\infty = 1$. 若 B 在 $L^\infty[0,1]$中稠密,则 $\forall t \in [0,1], \exists f_t \in B: \|f_t - \varphi_t\|_\infty < 1/2$. 若 $t,s \in [0,1], t \neq s$,则

$$\|f_t - f_s\|_\infty \geqslant \|\varphi_t - \varphi_s\|_\infty - \|f_t - \varphi_t\|_\infty - \|f_s - \varphi_s\|_\infty$$
$$> 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

可见 $f_t \neq f_s$,因此 B 不可数. 这表明 $L^\infty[0,1]$ 中不存在可数的稠密子集.

§4.3 L^2 空间

在前两节中,我们实际上是将通常 Euclid 空间中处理问题的一些思路移植到 L^p 空间. 通过自然的类比,并借用形象的几何语言,L^p 空间理论呈现出某种可加以直观想象的面貌. 这就促使我们想再往前推进一步:将更多的几何概念,例如角度、垂直性等引入 L^p 空间中来. 然而,这一设想仅能在 L^2 空间中获得成功. 这其实是很自然的. 读者试回忆一下 §4.1 中导入 L^p 范数的过程,从比较 §4.1 中式(1)～(4)可以看出,只有式(2),(3)表达的 L^2 范数才是 $\mathbf{R}^n$ 中模长公式(1)的直接推广.

L^2 范数与"内积"概念密切相关. 首先回顾一下 $\mathbf{R}^n$ 中的内积:任给 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, x 与 y 的内积为

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1}$$

以下概念正是(1)的一个自然推广.

4.3.1 定义 任给 $f, g \in L^2(X)$,称

$$(f,g) = \int_X fg\,\mathrm{d}\mu \tag{2}$$

为 f 与 g 的内积.

由 Hölder 不等式(4.1.2)，当 $f,g\in L^2$ 时有 $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_2\|g\|_2<\infty$，从而 $fg\in L^1$，故式(2)有意义. 直接从定义 4.3.1 推出内积有以下性质：

(i) 双线性性：(f,g)分别对 f 与 g 是线性的；

(ii) 对称性：$(f,g)=(g,f)$；

(iii) 正定性：$(f,f)=\|f\|_2^2\geqslant 0$；$(f,f)=0\Leftrightarrow f=0$, a.e..

性质(i)～(iii)通常称为**内积公理**. 实际上，本节中大部分结果仅仅依赖于内积公理，而不必用到内积的定义式(1)，因而也不用到 L^2 空间的特殊构成. 这就表明，可以从内积公理出发，抽象地展开一个**内积空间**理论，而不必限于考虑 L^2 空间. 这样的理论将在"泛函分析"课程中介绍. 至于现在，我们宁愿考虑具体的模型 L^2.

下面将用到 Hölder 不等式的以下的推论：

$$|(f,g)|\leqslant\|f\|_2\|g\|_2,\quad f,g\in L^2,\tag{3}$$

即

$$\left[\int_X fg\,\mathrm{d}\mu\right]^2\leqslant\int_X f^2\mathrm{d}\mu\int_X g^2\mathrm{d}\mu.$$

不等式(3)通常称为 **Schwarz 不等式**.

4.3.2 定义 若 $f,g\in L^2$，$(f,g)=0$，则说 f 与 g 正交(或直交)，记作 $f\perp g$. 设$\{\varphi_i\}\subset L^2$ 是一有限或无限序列. 若当 $i\neq j$ 时 $\varphi_i\perp\varphi_j$，则称$\{\varphi_i\}$为正交系；若再加上条件 $\|\varphi_i\|_2=1$(这相当于$(\varphi_i,\varphi_j)=\delta_{ij}$，$\delta_{ij}$是熟知的 Kronecker 记号)，则称$\{\varphi_i\}$为标准正交系. 若$\{\varphi_i\}\subset L^2$ 是一标准正交系，且每个 $f\in L^2$ 可表为 L^2 收敛的级数：

$$f=\sum c_i\varphi_i,\tag{4}$$

则称$\{\varphi_i\}$为空间 L^2 的标准正交基，或说$\{\varphi_i\}$是完全的标准正交系.

当展开式(4)成立时，容易验证 $c_i=(f,\varphi_i)$，因而展开式(4)是唯一的，称它为 f 关于标准正交基$\{\varphi_i\}$的 **Fourier 展开式**，而(f,φ_i)称为 **Fourier 系数**.

标准正交基可看作是空间 L^2中的"直角坐标系". 以下定理从不同角度刻画了标准正交基的特征性质.

4.3.3 定义 设$\{\varphi_i: i\in \mathbf{N}\}\subset L^2$ 是一标准正交系，则以下条件互相等价：

(i) $\{\varphi_i\}$是标准正交基；

(ii) $\{\varphi_i\}$的有限线性组合之全体在 L^2 中稠密；

(iii) 极大性：若 $f\in L^2, f\perp\varphi_i(\forall\, i\in\mathbf{N})$，则 $f=0$, a.e..

(iv) Parseval 等式：$\|f\|_2^2=\sum|(f,\varphi_i)|^2(\forall\, f\in L^2)$；

(v) $(f,g)=\sum(f,\varphi_i)(g,\varphi_i)(\forall\, f,g\in L^2)$.

证 任取 $f\in L^2$，令 $f_n=\sum_{i=1}^n(f,\varphi_i)\varphi_i$. 则由直接计算有

$$(f,f_n)=\left(f,\sum_{i=1}^n(f,\varphi_i)\varphi_i\right)=\sum_{i=1}^n|(f,\varphi_i)|^2;$$

$$\|f_n\|_2^2=(f_n,f_n)=\sum_{i=1}^n(f,\varphi_i)(f,\varphi_j)(\varphi_i,\varphi_j)$$

$$=\sum_{i=1}^n|(f,\varphi_i)|^2=(f,f_n);$$

$$\begin{aligned}\|f-f_n\|_2^2&=(f-f_n,f-f_n)\\&=\|f\|_2^2-2(f,f_n)+\|f_n\|_2^2.\end{aligned}$$

综合以上三式得到：

$$\|f_n\|_2^2=\sum_{i=1}^n|(f,\varphi_i)|^2; \tag{5}$$

$$\|f_n-f\|_2^2=\|f\|_2^2-\|f_n\|_2^2. \tag{6}$$

直接由(5),(6)看出(i) $\Leftrightarrow$ (iv). 其次显然(i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 设 $f\in L^2, f\perp\varphi_i(\forall i\in\mathrm{N})$. $\forall\,\varepsilon>0$. 由条件(ii)有 $g=\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$，使 $\|f-g\|_2<\varepsilon$. 显然$(f,g)=0$，于是

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2&=(f,f-g)+(f,g)=(f,f-g)\\&\leqslant\|f\|_2\|f-g\|_2\leqslant\varepsilon\|f\|_2.\end{aligned}$$

这得出 $\|f\|_2=0$，从而 $f=0$, a.e..

(iii) ⇒ (i) 取定 $f\in L^2$. 由(5),(6)有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(f,\varphi_i)|^2=\lim_n \|f_n\|_2^2\leqslant\|f\|_2^2,$$

可见上式左端级数收敛. 由此推出,当 $m>n,m,n\to\infty$时有

$$\|f_m-f_n\|_2^2=\Big\|\sum_{n<i\leqslant m}(f,\varphi_i)\varphi_i\Big\|_2^2$$

$$=\sum_{n<i\leqslant m}|(f,\varphi_i)|^2\to 0.$$

由 4.1.6,有 $g\in L^2$,使 $f_n\to g(L^2)$. $\forall\, i\in\mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}(g,\varphi_i)&=\lim_n(f_n,\varphi_i)\\&=\lim_n\Big(\sum_{j=1}^{n}(f,\varphi_j)\varphi_j,\ \varphi_i\Big)\\&=\lim_n\sum_{j=1}^{n}(f,\varphi_j)(\varphi_j,\varphi_i)\\&=(f,\varphi_i),\end{aligned}$$

这推出$(f-g)\perp\varphi_i$. 于是由条件(iii)推出 $f=g$,a.e.,因此 $f_n\to f(L^2)$. 故$\{\varphi_i\}$是标准正交基.

由直接计算知以下恒等式成立:

$$(f,g)=\frac{1}{4}(\|f+g\|_2^2-\|f-g\|_2^2),\ f,g\in L^2.$$

由此易验证(iv) ⇒ (v);而(v) ⇒ (iv)是显然的. 于是定理得证. □

设$\{\varphi_i:\ i\in\mathbf{N}\}$是 L^2 的标准正交基,$f,g\in L^2$. 令 $\xi_i=(f,\varphi_i)$, $\eta_i=(g,\varphi_i)$. 则依 4.3.3 有

$$\|f\|_2=\Big(\sum_i|\xi_i|^2\Big)^{1/2};$$

$$(f,g)=\sum_i\xi_i\eta_i.$$

以上两式正是 $\mathbf{R}^n$ 中模长与内积公式的推广(参看§4.1(1)与本节(1)). 这充分显示出标准正交基与直角坐标系的类似性.

构成标准正交基的具体步骤如下:

1° 选一可数集 $\{\psi_i\}\subset L^2$,使得其中任何有限组线性无关,且其有限线性组合之全体在 L^2 中稠密. 当 L^2 可分时,这样的 $\{\psi_i\}$ 一定存在.

2° 用 **Schmidt 正交化方法**从 $\{\psi_i\}$ 得出一标准正交系 $\{\varphi_i\}$:令 $g_1=\psi_1,\varphi_1=g_1/\|g_1\|_2$;

$$\varphi_i=\frac{g_i}{\|g_i\|},g_i=\psi_i-\sum_{j<i}\frac{(\psi_i,g_j)}{(g_j,g_j)}g_j,\ i=2,3,\cdots. \tag{7}$$

$\{\psi_i\}$的有限线性组合必可表为 $\{\varphi_i\}$的有限线性组合,因此由 4.3.3 知 $\{\varphi_i\}$是 L^2 的标准正交基.

例 1 在 $L^2[-1,1]$中,函数组 $\{t^i: i=0,1,2,\cdots\}$ 即可作为上述的 $\{\psi_i\}$. 用 Schmidt 正交化方法得出一组多项式 $\{L_i(t)\}$,它有如下通式:

$$L_i(t)=\frac{1}{2^i i!}\sqrt{\frac{2i+1}{2}}[(t^2-1)^i]^{(i)},i=0,1,2,\cdots. \tag{8}$$

称 $L_i(t)$ 为 **Legendre 多项式**.

例 2 在空间 $L^2[0,2\pi]$中,函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},n=1,2,\cdots \tag{9}$$

已经是标准正交系(其正交性在数学分析课程中即已确立). 可以指明(如参看[7,p.124]),三角多项式之全体在 $C[0,2\pi]$中稠密,从而亦在 $L^2[0,2\pi]$中稠密. 于是函数系(9)是 $L^2[0,2\pi]$的标准正交基. 因此,每个 $f\in L^2[0,2\pi]$可展开为 L^2 收敛的 Fourier 级数:

$$f=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{10}$$

现在再回到 4.3.3 的证明. 设 $g=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i$,在式(6)中以 $f-g$ 取代 f 得出:

$$\|f_n-f\|_2^2=\|f-g\|_2^2-\|f_n-g\|_2^2.$$

这表明 $\|f_n-f\|_2\leqslant\|f-g\|_2$,且仅当 $f_n=g$, a.e. 时等号成立. 这就得到极有价值的

4.3.4 推论 设 $\{\varphi_i: i\in\mathbf{N}\}\subset L^2$ 是一标准正交系,$f\in L^2$,则

$f_n = \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i$ 是函数集

$$\Gamma_n = \left\{\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i:\ c_i \in \mathbf{R}(1 \leqslant i \leqslant n)\right\}$$

中对 f 的最佳均方逼近，即

$$\| f - f_n \|_2 = \min_{g\in\Gamma_n} \| f - g \|_2.$$

Γ_n 可看作空间 L^2 中由"向量"$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 张成的"n 维平面"，而 f_n 是 Γ_n 上离 f 最近的"点"，这一解释有助于理解 4.3.2.

例 3 在区间 $[-1,1]$ 上求最佳均方逼近 $f(t) = (1+t^2)^{-1}$的二次多项式.

解 由 4.3.4，所求二次多项式为

$$\varphi(t) = (f,L_0)L_0 + (f,L_1)L_1(t) + (f,L_2)L_2(t), \qquad (11)$$

其中 $L_i(t)$依式(8)：

$$L_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ L_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,\ L_2(t) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2 - 1).$$

依次算出

$$(f,L_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4};$$

$$(f,L_1) = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0;$$

$$(f,L_2) = \sqrt{\frac{5}{8}}\int_{-1}^{1}\frac{3t^2-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}}(3-\pi).$$

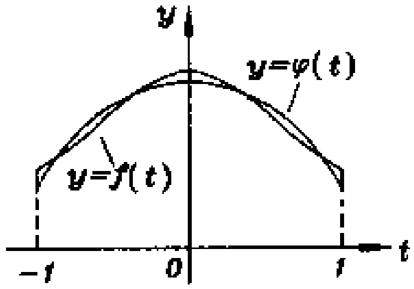


图 4-3

代入式(11)经整理后得

$$\varphi(t) = \frac{6\pi - 15}{4} - \frac{15(\pi - 3)}{4}t^2$$

$$\approx 0.9624 - 0.5310\,t^2.$$

$f(t)$与 $\varphi(t)$的图形见图 4-3.

△§4.4 对 Fourier 分析的若干应用

L 积分及 L^p 空间理论在 Fourier 分析中的应用具有典型意义。本节所作的初步介绍，主要起说明作用，进一步的了解请参看有关 Fourier 分析的专门书籍。

鉴于只有容许使用复数才能完善处理 Fourier 分析的内容，对于本书前面的材料必须作如下扩充，使之能用于复值函数：若 u,v 是两个几乎处处有限的可测实函数，则 $f = u+\mathrm{i}v$ 是几乎处处有定义的复值函数，称它为**复可测函数**；当 $u,v\in L^1$ 时约定说 f 可积(亦写作 $f\in L^1$)，且规定其积分为

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X (u + \mathrm{i}v)\mathrm{d}\mu = \int_X u\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_X v\mathrm{d}\mu.$$

经此扩充之后，关于 L 积分的所有结果，只要不涉及函数值的大小比较(如非负性、单调性等)，都可应用于复值可积函数。函数类 $C(X)$，$L^p(X)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 自然亦作相应的扩充，使之包括复值函数。

若对给定的函数 f,g 及几乎所有的 $x\in\mathbf{R}$，

$$h(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

有定义，则称 h 为 f 与 g 的**卷积**，记作 $h = f * g$。

4.4.1 命题 卷积有以下性质：

(i) 对称性：$f * g = g * f$。

(ii) 双线性性：$f * g$ 对 f 与 g 分别是线性的。

(iii) 若 $f\in L^p(\mathbf{R})(1 \leqslant p \leqslant \infty)$，$g\in L^1(\mathbf{R})$，则 $f * g\in L^p$，且

$$\| f * g \|_p \leqslant \| f \|_p \| g \|_1.$$

(iv) 若 $f,g\in L^2(\mathbf{R})$，则 $f * g\in C(\mathbf{R})$，且

$$\| f * g \|_\infty \leqslant \| f \|_2 \| g \|_2.$$

证 依定义式(1),性质(i)(ii)是明显的,只需证(iii)与(iv).下面设 $h = f * g$.

(iii) $p = \infty$的情况是明显的,下面设 $1 \leqslant p < \infty$. 利用 Hölder 不等式不难验证(参看本章习题 1):

$$\left[\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\right]^p \leqslant \|g\|_1^{p-1}\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|^p|g(y)|\mathrm{d}y.$$

于是由 Fubini 定理有

$$\begin{aligned}
&\int\left[\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\right]^p \mathrm{d}x \\
\leqslant\ & \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbf{R}} |g(y)|\mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|^p \mathrm{d}x \\
=\ & \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbf{R}} |g(y)|\mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x \quad (\text{用 } 3.2.9) \\
=\ & \|g\|_1^p \ \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

由此可见,$h = f * g$ 有定义,且 $\|h\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.

(iv) 由 Schwarz 不等式及 3.2.9 有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y &\leqslant \left[\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|^2 \mathrm{d}y\right]^{1/2} \|g\|_2 \\
&= \|f\|_2 \|g\|_2,
\end{aligned}$$

由此可见 $h = f * g$ 有定义,且 $\|h\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$. 其次,用 Schwarz 不等式同样得到:

$$\begin{aligned}
&|h(x+\tau) - h(x)|^2 \\
\leqslant\ & \|g\|_2^2 \int_{\mathbf{R}} |f(x+\tau-y) - f(x-y)|^2 \mathrm{d}y \\
=\ & \|g\|_2^2 \int_{\mathbf{R}} |f(y-\tau) - f(y)|^2 \mathrm{d}y. \quad (\text{用 } 3.2.9)
\end{aligned}$$

于是由 4.2.5 得出 $h \in C(\mathbf{R})$. □

约定以 $C^r(I)$记区间 I 上 r 次连续可微函数之全体,令 $C^\infty(I) = \bigcap_{r=0}^{\infty} C^r(I)$;

$$C_c^r(\mathbf{R}) = C^r(\mathbf{R}) \cap C_c(\mathbf{R}), 0 \leqslant r \leqslant \infty. \tag{2}$$

4.4.2 命题 设 $f \in C_c^r(\mathbf{R})(0 \leqslant r < \infty)$,$g$: $\mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ 在任何有

限区间上可积，则 $f*g\in C^r(\mathbf{R})$，且

$$(f*g)^{(i)}=f^{(i)}*g\ (0\leqslant i\leqslant r). \tag{3}$$

证 显然 $f*g$ 存在. 式(3)相当于

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\int_{\mathbf{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}}f^{(i)}(x-y)g(y)\mathrm{d}y,$$

这由相继 r 次应用 3.3.6 (iii) 得出. □

4.4.3 定义 若一序列 $\{\varphi_n\}\subset L^1(\mathbf{R})$满足条件：(i) $\varphi_n\geqslant 0$ 且 $\|\varphi_n\|_1=1(\forall\ n\in\mathbf{N})$；(ii) $\forall\ \delta>0$：$\lim\limits_n\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=1$，则称 φ_n 为 $\mathbf{R}$ 上的逼近单位.

若以连续变量 s 代替 n，以 $s\to s_0$ 代替 $n\to\infty$，则 4.4.3 定义出逼近单位 φ_s. 此处为简单起见限定 $\varphi_n\geqslant 0$(或 $\varphi_s\geqslant 0$)，在一定附加条件下也可以考虑不必非负的逼近单位.

4.4.4 定理(Fejèr) 设 φ_n 是一逼近单位.

(i) 若 $f\in L^p(\mathbf{R})$，$1\leqslant p<\infty$，则 $f*\varphi_n\to f(L^p)$.

(ii) 若 $f\in L^\infty(\mathbf{R})\cap L^1(\mathbf{R})$，$K\subset\mathbf{R}$，$\lim\limits_{y\to 0}\sup\limits_{x\in K}|f(x+y)-f(x)|=0$，则在 K 上 $f*\varphi_n\rightrightarrows f$.

以 φ_s 代 φ_n 有同样的结论.

证 只证(i)，(ii)的证明是类似的. 令 $f_n=f*\varphi_n$，则 $f_n\in L^p$ (4.4.1(iii)). 由 $\|\varphi_n\|_1=1$ 有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=\left|\int_{\mathbf{R}}f(x-y)\varphi_n(y)\mathrm{d}y-\int_{\mathbf{R}}f(x)\varphi_n(y)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}}|f(x-y)-f(x)|\varphi_n(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

于是类似于 4.4.1(iii)之证有

$$|f_n(x)-f(x)|^p\leqslant\int_{\mathbf{R}}|f(x-y)-f(x)|^p\varphi_n(y)\mathrm{d}y;$$

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_p^p&\leqslant\int_{\mathbf{R}}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}}|f(x-y)-f(x)|^p\varphi_n(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbf{R}}\varphi_n(y)\mathrm{d}y\int_{\mathbf{R}}|f(x-y)-f(x)|^p\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_{|y|<\delta} \varphi_n(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)-f(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$+ \int_{|y|\geqslant\delta} \varphi_n(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)-f(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$= I_1 + I_2.$$

$\forall\varepsilon > 0$，由 4.2.5，可取 $\delta > 0$，使

$$I_1 \leqslant \varepsilon \int_{|y|<\delta} \varphi_n(y)dy \leqslant \varepsilon \|\varphi_n\|_1 = \varepsilon.$$

固定此 δ，依 4.4.3(ii) 有

$$I_2 \leqslant \int_{|y|\geqslant\delta} \varphi_n(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}} 2^p[|f(x-y)|^p + |f(x)|^p]\mathrm{d}x$$

$$= 2^{p+1}\|f\|_p^p \int_{|y|\geqslant\delta} \varphi_n(y)\mathrm{d}y \to 0\ (n\to\infty).$$

因此有 $\|f_n - f\|_p \to 0 (n\to\infty)$. □

例 1 在$(0,1)$上定义

$$\varphi(x) = \left[1 + \exp\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right)\right]^{-1};$$

然后令

$$\varphi(0) = 1, \varphi(x) = 0 (x \geqslant 1),$$

$$\varphi(y) = \varphi(-y)(y < 0)$$

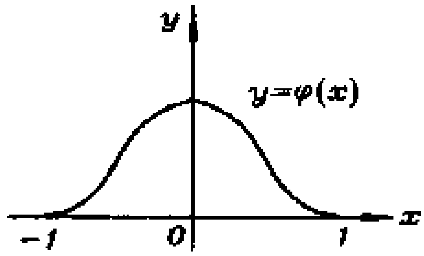


图 4-4

(图 4-4). 可指明 $\varphi\in C^\infty(\mathbf{R})$(证明是初等的，但有些繁琐，请读者自己完成). 置

$$\varphi_n(x) = n\varphi(nx)/\|\varphi\|_1,\ n = 1,2,\cdots. \tag{4}$$

则易见 φ_n 是一逼近单位. 任给 $f\in L^p(\mathbf{R})(1\leqslant p<\infty)$，令 $f_n = f*\varphi_n$，则 $f_n\in C^\infty(\mathbf{R})$(4.4.2)，且 $f_n\to f(L^p)$(4.4.3(i)). 这就得出结论：每个 $f\in L^p(\mathbf{R})$可用无限次可微函数 L^p 逼近(对照 4.2.3 与 4.2.4).

例 2 所谓"Weierstrass 核"W_n 定义为：

$$W_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2},\ x \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

因

$$\int_{\mathbf{R}} W_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = 1;$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} W_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-n\delta}^{n\delta} e^{-t^2}\mathrm{d}t \to 1 (\delta > 0, n \to \infty),$$

故 W_n 是一逼近单位. 设 $-\infty < a < b < \infty, \Delta = (\alpha, \beta) \subset [a, b]$, $f = \chi_\Delta, f_n = f * W_n$,则

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-n^2(x-y)^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{2k}(x-y)^{2k}}{k!}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{2k+1}}{k!} \int_\alpha^\beta (x-y)^{2k}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{2k+1}}{k!(2k+1)} P_{2k}(x), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $P_{2k}(x)$ 是 $2k$ 次多项式. 因 $f_n \to f(L^p)$,而在 $[a,b]$ 上, f_n 可用(6)右端级数的部分和一致逼近,故在 $[a,b]$ 上 f 可用多项式 L^p 逼近. 于是结合 4.2.3 得出:每个 $f \in L^p[a,b]$ 可用多项式 L^p 逼近.

例 3 令 $\varphi_h = (2h)^{-1}\chi_{[-h,h]}$,则 φ_h(关于 $h \downarrow 0$)为逼近单位,这是逼近单位的最简单的例子之一,但亦不失为有用. 任给 $f \in L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$,令

$$f_h(x) = (f * \varphi_h)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)\mathrm{d}y. \tag{7}$$

由 4.4.1(iii) 有 $\| f_h \|_p \leqslant \| f \|_p$; 由 4.4.4(i) 有 $f_h \to f(L^p)$ $(h \downarrow 0)$.

4.4.5 定义 任给 $f \in L^1(\mathbf{R})$,称

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \ (\xi \in \mathbf{R}) \tag{8}$$

为 f 的 Fourier 变式，称映射 $f \to \hat{f}$ 为 Fourier 变换.

给定 $f\in L^1(\mathbf{R})$. 对任给 $\xi\in\mathbf{R}$，由(8)有

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f(x)|\mathrm{d}x = \|f\|_1,$$

因此 $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$. 由 3.3.6(ii)知 $\hat{f}\in C(\mathbf{R})$. 利用 $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ 得

$$\begin{aligned} 2|\hat{f}(\xi)| &= |\hat{f}(\xi) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\hat{f}(\xi)| \\ &= \left|\hat{f}(\xi) - \int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x\xi-\pi)}\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\hat{f}(\xi) - \int_{\mathbf{R}} f\left(x+\frac{\pi}{\xi}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbf{R}} \left|f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{\xi}\right)\right|\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

于是由 4.2.5 有 $\hat{f}(\xi) \to 0$ $(|\xi| \to \infty)$.

Fourier 变换的一些初等性质综述如下：

4.4.6 命题 对 $f,g\in L^1(\mathbf{R})$，以下结论成立：

(i) $\hat{f}\in C(\mathbf{R})$，$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ 且 $\hat{f}(\xi) \to 0(|\xi| \to \infty)$.

(ii) 设 $f_\tau(x) = f(x+\tau)$，则 $\hat{f}_\tau(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\xi}\hat{f}(\xi)$.

(iii) 若 $xf(x)\in L^1$，则 $\hat{f}'(\xi) = -\mathrm{i}(xf(x))^\wedge(\xi)$.

(iv) $(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$，其中左端记 $f*g$ 的 Fourier 变式.

证 (i)已于前面说明；(ii)(iii)是明显的. 今证(iv). 由 4.4.1 (iii)有 $h = f*g\in L^1$. 因

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbf{R}^2} |f(x-y)g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbf{R}} |g(y)|\mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|\mathrm{d}x \\ &= \|f\|_1\|g\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

故可用 Fubini 定理得出：

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbf{R}}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\mathbf{R}} g(y) e^{-iy\xi} dy \int_{\mathbf{R}} f(x-y) e^{-i(x-y)\xi} dx$$

$$= \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi) \ (\forall \xi \in \mathbf{R}). \qquad \square$$

4.4.7 反演公式 设 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$，$f$ 在 x 满足条件

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)| dy = 0, \tag{9}$$

则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \tag{10}$$

证 设 W_n 依(5)，令 $f_n = f * W_n$.

1° 证 $f_n(x) \to f(x)$. 类似于 4.4.4 之证，有

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leqslant \int_{\mathbf{R}} |f(x-y) - f(x)| W_n(y) dy \\
&\leqslant \int_{|y| \leqslant \delta} |f(x-y) - f(x)| W_n(y) dy \\
&\quad + \int_{|y| > \delta} g(y) W_n(y) dy + |f(x)| \int_{|y| > \delta} W_n(y) dy \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

其中 $\delta > 0$，$g(y) = |f(x-y)|$. 令

$$F(r) = \int_{|y| \leqslant r} |f(x-y) - f(x)| dy,$$

则 F 对 r 单调增，$F(0) = 0$. $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$，使当 $r \in (0, \delta]$ 时 $F(r) < \varepsilon r$（用条件(9)）. 于是

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\delta} W_n(r) dF(r) \\
&= W_n(\delta) F(\delta) - \int_0^{\delta} F(r) dW_n(r) \\
&\leqslant \varepsilon \delta W_n(\delta) - \int_0^{\delta} \varepsilon r dW_n(r) \\
&= \varepsilon \int_0^{\delta} W_n(r) dr \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

(其中用了 $W_n'(r) \leqslant 0$ 及分部积分公式，参照 §5.5). 固定 δ. 取 $\varphi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$，使 $\|\varphi - g\|_1 < \delta\varepsilon$，则

$$I_2 \leqslant \int_{|y|>\delta} |g(y) - \varphi(y)| W_n(y) \mathrm{d}y + \|\varphi\|_\infty \int_{|y|>\delta} W_n(y) \mathrm{d}y.$$

$$= I_2' + I_2''.$$

因 W_n 为逼近单位，故有 $I_2'' + I_3 \to 0 (n \to \infty)$. 而

$$I_2' \leqslant \sup_n W_n(\delta) \|g - \varphi\|_1 < \varepsilon / \sqrt{2\pi e}$$

(不难用微分法验证 $W_n(\delta) \leqslant 1/\sqrt{2\pi e}$). 综合以上所证，即得 $|f_n(x) - f(x)| \to 0 (n \to \infty)$.

2°　证 $\hat{\hat{W}}_n = (\hat{W})^{\wedge} = 2\pi W_n$：

$$\hat{W}_n(\xi) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} \exp(-n^2 y^2 - \mathrm{i} y \xi) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\left(ny + \frac{\mathrm{i}\xi}{2n}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4n^2}\right] \mathrm{d}y$$

$$= \exp(-\xi^2/4n^2) \tag{11}$$

(严格的推导用到复分析)；

$$\hat{\hat{W}}_n(y) = \int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4n^2} - \mathrm{i} y \xi\right) \mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\left(\frac{\xi}{2n} + \mathrm{i} n y\right)^2 - n^2 y^2\right] \mathrm{d}\xi$$

$$= 2n \sqrt{\pi} \mathrm{e}^{-n^2 y^2} = 2\pi W_n(y).$$

3°　用 $\hat{\hat{W}}_n = 2\pi W_n$ 及 Fubini 定理得出：

$$f_n(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x - y) W_n(y) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(x + y) \hat{\hat{W}}_n(y) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(x + y) \mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}} \hat{W}_n(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} y \xi} \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{W}_n(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\xi \int_{\mathbf{R}} f(x + y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+y)\xi} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{W}_n(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi. \tag{12}$$

4° 由(11)有 $\hat{W}_n(\xi) \to 1 (n \to \infty)$, $|\hat{W}_n(\xi)| \leqslant 1$, 于是

$$|\hat{W}_n(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}| \leqslant |\hat{f}(\xi)|.$$

因此,将控制收敛定理用于(12),并用已证之 1° 得

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{W}_n(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi. \end{aligned}$$ □

注 在 §5.3 中将指明,f 在几乎所有的 $x\in\mathbf{R}$ 满足条件(9)(5.3.7). 因此,当 $f,\hat{f}\in L^1(\mathbf{R})$ 时,对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}$,反演公式(10)成立.

4.4.8 定义 设 $f\in L^1[0,2\pi]$. 称

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad (k\in\mathbf{Z}) \tag{13}$$

为 f 的 Fourier 系数,而称级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \tag{14}$$

为 f 的 Fourier 级数.

以 $S_n f$ 记级数(14)的"对称部分和",即

$$(S_n f)(x) = \sum_{|k|\leqslant n} \hat{f}(k)e^{ikx},\ n = 0,1,\cdots. \tag{15}$$

然后以 $\sigma_n f$ 记 $S_k f\ (0\leqslant k\leqslant n-1)$的算术平均,即

$$\sigma_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k f,\ n = 1,2,\cdots. \tag{16}$$

将(13),(15)代入(16),可得出 $\sigma_n f$ 的明显表达式:

$$\begin{aligned} (\sigma_n f)(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|l|\leqslant k} \hat{f}(l)e^{ilx} \\ &= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|l|\leqslant k}\int_0^{2\pi} f(y)e^{il(x-y)}dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} f(y) F_n(x-y) \mathrm{d}y, \tag{17}$$

其中

$$F_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|l| \leqslant k} \mathrm{e}^{ilx}. \tag{18}$$

用完全初等的计算可以得出

$$F_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\left(\sin\frac{nx}{2} \Big/ \sin\frac{x}{2}\right)^2, \ n = 1,2,\cdots. \tag{19}$$

利用(18)得出 $\int_0^{2\pi} F_n(x)\mathrm{d}x = 1$. 利用(19)可验证

$$F_n(x) \leqslant \frac{2n\pi}{4 + n^2x^2} \ (0 \leqslant x \leqslant \pi). \tag{20}$$

事实上，由 $|\sin x| \leqslant x (x > 0)$ 及 $|\sin x| \leqslant 1$ 得

$$\sin^2 x \leqslant \left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 \leqslant \frac{4x^2}{1+x^2} \ (x > 0).$$

又当 $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ 时 $\sin x \geqslant 2x/\pi$. 于是当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时

$$F_n(x) \leqslant \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{4(nx/2)^2}{1+(nx/2)^2} \cdot \frac{1}{(x/\pi)^2} = \frac{2n\pi}{4+n^2x^2}.$$

4.4.9 定理　设 $f \in L^p[0,2\pi] (1 \leqslant p < \infty)$，则 $\sigma_n f \to f(L^p)$；若 $f \in C[0,2\pi]$，$f(0) = f(2\pi)$，则 $\sigma_n f \rightrightarrows f$.

证　设 f 已扩张为 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期的函数. 令 $f_n = \sigma_n f$，利用(17)并注意 $\int_0^{2\pi} F_n \mathrm{d}x = 1$，类似于 4.4.4 之证有

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x-y) - f(y)|^p F_n(y) \mathrm{d}y;$$

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_p^p &\leqslant \int_0^{2\pi} F_n(y)\mathrm{d}y \int_0^{2\pi} |f(x-y) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)\mathrm{d}y \int_0^{2\pi} |f(x-y) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} F_n(y)\mathrm{d}y \int_0^{2\pi} |f(x-y) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

由 §4.2(4)有

$$\lim_{y\to 0}\int_0^{2\pi}|f(x-y)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0.$$

因此,$\forall\ \varepsilon>0$,可取 $\delta\in(0,\pi)$,使

$$I_1\leqslant\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}F_n(y)\mathrm{d}y\leqslant\varepsilon.$$

固定此 δ,估计 I_2:

$$\begin{aligned}
I_2&\leqslant\int_{\delta}^{2\pi-\delta}F_n(y)\mathrm{d}y\int_0^{2\pi}2^p[|f(x-y)|^p+|f(x)|^p]\mathrm{d}x\\
&=2^{p+1}\|f\|_p^p\int_{\delta}^{2\pi-\delta}F_n(y)\mathrm{d}y\\
&=2^{p+2}\|f\|_p^p\int_{\delta}^{\pi}F_n(y)\mathrm{d}y\\
&\leqslant 2^{p+2}\|f\|_p^p\int_{\delta}^{\pi}\frac{2n\pi}{4+n^2x^2}\mathrm{d}x\quad(\text{用}(20))\\
&\leqslant 2^{p+2}\|f\|_p^p\cdot\frac{2n\pi^2}{4+n^2\delta^2}\to 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

综上所证,得出 $\|f_n-f\|_p\to 0(n\to\infty)$.

若 $f\in C[0,2\pi]$,$f(0)=f(2\pi)$,则可设 f 已扩张为 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数. 令 $M=\|f\|_\infty$. $\forall\ \varepsilon>0$,因 f 一致连续,有 $\delta\in(0,\pi)$,使当 $x,y\in\mathbf{R}$,$|x-y|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

今估计

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)|&\leqslant\int_{-\delta}^{2\pi-\delta}|f(x-y)-f(x)|F_n(y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{2\pi-\delta}=J_1+J_2.
\end{aligned}$$

由 δ 的选择有

$$J_1\leqslant\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}F_n(y)\mathrm{d}y\leqslant\varepsilon.$$

而

$$J_2 \leqslant 2M\int_{\delta}^{2\pi-\delta} F_n(y)\mathrm{d}y \to 0\ (n\to\infty),$$

故 $f_n \rightrightarrows f$. □

评 注

1. L^p 空间理论的提出，是试图将有限维空间的理论拓展到函数空间的一系列探索的结果. Hilbert 在研究无穷线性方程组时，考虑了满足条件 $\sum |x_n|^2 < \infty$ 的数列，这就进到了 l^2 空间的门槛，但他却未提出 l^2 空间这一概念. 紧接着的一步是由 Schmidt 与 Fréchet 迈出的，他们研究了空间 l^2 的度量、完备性与可分性. Lebesgue 积分创立之后，正在创建无穷维空间理论的数学家立即认识到空间 $L^2[a,b]$ 的重要性，这类空间与 Fourier 级数及其他正交展开相关. Schmidt 与 Fréchet 在 1907 年首先注意到从空间 l^2 过渡到 $L^2[a,b]$ 的可能性. 几乎在同时，Riesz 与 Fischer 发现了空间 l^2 与 $L^2[a,b]$ 之间的同构性，这是 Lebesgue 理论引人注目的早期胜利之一. 至此，过渡到更一般的 L^p 空间只差一小步了，这一步是由 Riesz 完成的(1910 年). Riesz 证明了有关 L^p 空间的主要结果.

2. L^p 空间理论只不过是本世纪蓬勃发展起来的函数空间理论的初阶. 包括实变函数论在内的分析数学的深入发展，愈来愈依赖于对各种函数类的系统考察. 本章所考察的"p 次可积函数类"正是具有广泛应用价值的函数类之一. 在分析学中能起重要作用的函数类，通常对一定的代数运算封闭，而且能以适当方式引入极限运算，因而具有某种多少类似于平常空间的结构. 通过类比及借用几何术语，函数空间概念就此形成. 函数空间的引入是数学思想上的一个重大突破. 借助于函数空间概念，许多在直觉上极其简单明白的思想获得了深刻的应用，且导致几乎不可思议的结果. 在函数空间的框架内，经典分析的一些复杂问题在高度简化的形式下得到有效处理. 这一切大大刺激了抽象空间理论的发展，有关的内容读者将在泛函分

析课程中获得详细了解.对于以研究抽象空间为主要任务的泛函分析学科的形成,实变函数论起了特殊的作用.在一定意义上,可以说 L^p 空间理论正是从实变函数论通向泛函分析的桥梁.

3. 本章对“L^p 逼近”概念给予了一定的强调.应当说,逼近方法是现代数学中最具普遍价值的方法之一,而在实变函数论中尤为重要.通常认为,实变函数中考虑的集与函数是高度不规则的,从传统的观点看来简直是病态的,以至无法用熟悉的初等分析工具加以处理.这一不利因素得以克服,正有赖于逼近方法.例如,用开集逼近可测集;用连续函数逼近可测函数,等等.著名英国数学家 Littlewood 提出的“三大原理”是很典型的:每个可测集近似于有限个区间的并;每个可测函数近似于连续函数;可测函数列的收敛近似于一致收敛.读者如能领会这段话中的深意,或许不致认为实变函数格外艰深抽象了.

4. 如我们在§4.3 中所看到的,L^2空间与 Euclid 空间的类比达到了相当完美的程度.几乎每个 Euclid 几何的概念与结论都可在 L^2 空间中获得相应的解释.例如,在 L^2中成立勾股定理:若 $f,g\in L^2$,$f\perp g$,则 $\|f\pm g\|_2^2=\|f\|_2^2+\|g\|_2^2$;$L^2$中的“直角坐标系”就是标准正交基,在标准正交基下的范数与内积公式正是 $\mathbf{R}^n$ 中相应公式的推广.如所熟知,给定空间中一点 x 及一平面 P,可求得 P 上唯一点 y,使它离 x 最近,y 就是 x 在 P 上的正投影.同样,若 $f\in L^2$,A 是 L^2的闭子空间,则必有 $g\in A$ 使 $\|f-g\|_2$ 达到最小(g 是 A 中对 f 的“最佳均方逼近”),且 g 也是 f 在 A 上的“正投影”(这意味着 $\forall\,\varphi\in A$,有$(f-g)\perp\varphi$).所有这些近乎直接的推广,在 L^2中形成了极为丰富且甚具直观性的结构.因此 L^2空间理论是高度发展且形式异常优美的数学理论之一,它常被用来作为说明数学的抽象化方法巨大力量的典型例证.当然,本章所介绍的 L^2空间知识只是最基本的.就是对这部分较初等的内容的理解与把握,充分运用熟知的几何知识所提供的启示也是关键的.

习 题 A

1. 设 $f,g\in M^+(X),1\leqslant p<\infty$,则 $\left(\int_X fg\mathrm{d}\mu\right)^p\leqslant\|g\|_1^{p-1}\int_X f^p g\mathrm{d}\mu$.

2. 设 $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}=1,f\in L^p,g\in L^q,h\in L^r$,则

$$\|fgh\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.$$

3. 设 $0<\mu X<\infty,f\in L^r(X)$,则 $\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

4. 设 $f,g\in M^+(0,1),f(x)g(x)\geqslant x^{-1}$,a.e.,则 $\|f\|_1\|g\|_1\geqslant 4$.

5. 设 $f\in L^p(X)(1\leqslant p<\infty),A\subset X$ 可测,则

$$\|f\|_p\leqslant\left(\int_A|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}+\left(\int_{A^c}|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

6. 设 $f\in L^r\cap L^s,1\leqslant r,s<\infty,0<\lambda<1,\dfrac{1}{p}=\dfrac{\lambda}{r}+\dfrac{1-\lambda}{s}$,则

$$\|f\|_p\leqslant\|f\|_r^\lambda\|f\|_s^{1-\lambda}.$$

7. 设 $\mu X<\infty,1\leqslant p<r$,则 $L^r(X)\subset L^p(X);l^p\subset l^r$.

8. 若 $\mu X=\infty,1\leqslant p<r,L^p(X)$与$L^r(X)$之间是否存在包含关系?

9. 设 $f\in L^p[a,b],1<p<\infty,F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x+h)-F(x)=O(|h|^{(p-1)/p})$.

10. 若 $f_n\to f(L^p)$,则 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

11. 设 $f_n\to f(L^p),f_n\to g$,a.e.,则 $f=g$,a.e..

12. 设 $f_n\to f(L^\infty)$,则存在零测集 A,在 A^c 上 $f_n\rightrightarrows f$.

13. 设 $f_n\to f(L^p),g_n\to g(L^q),p^{-1}+q^{-1}=1$,则 $f_ng_n\to fg(L^1)$.

14. 设 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p(1\leqslant p<\infty),f_n\to f$,a.e.,则对任何可测集 $A\subset X$有 $\int_A|f_n|^p\mathrm{d}\mu\to\int_A|f|^p\mathrm{d}\mu$.

15. 设 $f_n\to f(L^p[a,b])$,则 $\int_a^x f_n\mathrm{d}m\rightrightarrows\int_a^x f\mathrm{d}m\ (a\leqslant x\leqslant b)$.

16. 设 $\sum_{n=1}^\infty\|f_n\|_p<\infty$,则 $\sum_{n=1}^\infty f_n$ 必 L^p 收敛.

17. 设 $\mu X<\infty,1\leqslant p<r$.若 $f_n\to f(L^r)$,则 $f_n\to f(L^p)$;若 $x^{(k)}\to x(l^p)$,则 $x^{(k)}\to x(l^r)(k\to\infty)$.

18. 设 $f\in L^p[a,b](1\leqslant p<\infty)$,则

$$\lim_{\tau \to 0} \int_a^b |f(x + \tau) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0.$$

19.　设 $f \in L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$，则

$$\lim_{|y| \to \infty} \int_{\mathbf{R}} |f(x + y) + f(x)|^p \mathrm{d}x = 2\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x.$$

20.　设 $A \subset \mathbf{R}^n$，$mA < \infty$，则 $\lim\limits_{x \to 0} m(A\Delta(A+x)) = 0$.

21.　设 $\sup\limits_n \|g_n\|_\infty < \infty$，$\lim\limits_n \int_a^x g_n \mathrm{d}m = 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$，$f \in L^1[a,b]$，则 $\lim\limits_n \int_a^b f g_n \mathrm{d}m = 0$.

22.　在 $\mathbf{R}^n$ 中引入阶梯函数概念并推广 4.2.3 的结论.

23.　设 $f_n \to f(L^2)$，$g_n \to g(L^2)$，则 $(f_n, g_n) \to (f, g)$.

24.　设 $f \in L^2(0,\pi)$，则不等式 $\int_0^\pi [f(x) - \sin x]^2 \mathrm{d}x \leqslant 4/9$ 与不等式 $\int_0^\pi [f(x) - \cos x]^2 \mathrm{d}x \leqslant 1/9$ 不能并立.

25.　设 $\{\varphi_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是 $L^2[a,b]$ 的标准正交基，$f \in L^2$，$A \subset [a,b]$ 可测，则 $\int_A f \mathrm{d}m = \sum (f, \varphi_n) \int_A \varphi_n \mathrm{d}m$.

26.　若 $f, f_n \in L^2 (n = 1, 2, \cdots)$，$\forall g \in L^2$，有 $(f_n, g) \to (f, g)$，则说序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f，记作 $f_n \rightharpoonup f$. 若 $f_n \rightharpoonup f$ 且 $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$，则 $f_n \to f(L^2)$.

27.　设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $\sup\limits_n \|f_n\|_2 < \infty$，则 $f_n \rightharpoonup f$.

28.　设 $\{f_n\} \subset L^2$，$f_n \rightharpoonup f$. 是否一定 $f_n \xrightarrow{\mu} f$?

29.　在区间 $[0,1]$ 上求最佳均方逼近函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 的 2 次多项式.

30.　设 $f \in L^2[0, 2\pi]$，写出 f 关于三角函数系(见 §4.3(9))的 Parseval 等式.

习　题　B

31.　设 $\mu X < \infty$，$f \in M(X)$，$1 \leqslant p < \infty$，则

$$f \in L^p \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} \mu X(|f| \geqslant n) < \infty.$$

32.　设 $\mu X < \infty$，$f \in L^\infty(X)$，$\|f\|_\infty > 0$，则

$$\lim_n \|f\|_{n+1}^{n+1} / \|f\|_n^n = \|f\|_\infty.$$

33. 设 $f,g\in M^+(X)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $\beta>1$, 则

$$\lambda^\beta\|f\|_p+(1-\lambda)^\beta\|g\|_p\leqslant\|f+g\|_p.$$

34. 设 $f\in M(X)$. 若 $\forall\, g\in L^1$, 有 $fg\in L^1$, 则 $f\in L^\infty$.

35. 设 $f,f_n\in L^p(n=1,2,\cdots)$, $f_n\to f$, a.e., 则 $f_n\to f(L^p)\Leftrightarrow\|f_n\|_p\to\|f\|_p(1\leqslant p<\infty)$.

36. 设 $f_n\to f$, a.e., $\sup\limits_n\|f_n\|_p<\infty$, $1<p<\infty$, $g\in L^q(X)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, 则 $\int_X f_n g\mathrm{d}\mu\to\int_X fg\mathrm{d}\mu$.

37. 设 $f\in L^p(0,\infty)(1<p<\infty)$, $\varphi(y)=\int_0^\infty x^{-1}f(x)\sin xy\mathrm{d}x$, 则当 $h\downarrow 0$ 时 $\varphi(y+h)-\varphi(x)=O(h^{1/p})$.

38. 设 $f\in L^1[a,b]$, 则 $\lim\limits_n\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

39. 设 $f\in L^1[a,b]$, g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 有界可测且以 T 为周期, 则

$$\lim_n\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_0^T g(x)\mathrm{d}x.$$

40. 设 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 以 T 为周期, $f\in L^1[0,T]$, 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f\mathrm{d}m=\frac{1}{T}\int_0^T f\mathrm{d}m.$$

41. 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)(1\leqslant p<\infty)$, 则

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)+f(x+y)|^p\mathrm{d}x=2\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

42. 设 $F\subset L^2(X)$, $\forall\, f,g\in F$, 当 $f\neq g$ 时 $f\perp g$. 若 $L^2(X)$ 可分, 则 F 是可数集.

43. 设 $f\in M(X)$, $\beta>0$. 若 $\forall\, g\in L^2(X)$, 有 $\|fg\|_2\leqslant\beta\|g\|_2$, 则 $\|f\|_\infty\leqslant\beta$.

44. 设 $X\subset\mathbf{R}^n$, $\{\varphi_i: i\in\mathrm{N}\}$ 是 $L^2(X)$ 的标准正交基, 则 $\sum\varphi_i^2=\infty$, a.e.; 当 $A\subset X$, $mA>0$ 时 $\sum\int_A\varphi_i^2\,\mathrm{d}m=\infty$.

45. 设 $\{\varphi_n\}$ 是 L^2 的标准正交基, $\{\psi_n\}$ 是 L^2 中的标准正交系, $\|\varphi_n\|_2^2=\sum\limits_i|(\varphi_n,\psi_i)|^2(n=1,2,\cdots)$, 则 $\{\psi_n\}$ 是标准正交基.

46. 设 $\{\varphi_n: n\in\mathrm{N}\}$ 是 L^2 的标准正交基, $\{\psi_n: n\in\mathrm{N}\}$ 是 L^2 中的标准正交系, $\sum\|\varphi_n-\psi_n\|_2^2<1$, 则 $\{\psi_n\}$ 亦是标准正交基.

47. 设 $\Phi\subset L^2(X)$ 是一无限的标准正交系, 当 $f\in L^2$, $f\perp\varphi(\forall\,\varphi\in\Phi)$ 时

$f = 0$,a.e.，则对每个 $f \in L^2$ 有序列 $\{\varphi_n\} \subset \Phi$，使得依 L^2 收敛有展开式 $f = \sum (f, \varphi_n) \varphi_n$.

48. 设 $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbf{R})$，则 $\hat{f} * \hat{g} = 2\pi(fg)$.

49. 设 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$，则 $f \in L^2(\mathbf{R})$.

50. 设 $f, g, \hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\, \overline{g(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

第五章　微分论·Stieltjes 积分

本章包含两个互相联系的课题. 前四节讨论几类具有基本意义的函数：单调函数、有界变差函数、绝对连续函数与凸函数，中心问题是考察其微分性质，因此通常称为"微分理论". 由于有测度论及 Lebesgue 积分论这样强有力的工具可用，微分论的结果极为深刻；关于 L 积分的 Newton-Leibniz 公式的建立，是这一理论最有意义的成果. 本章后半部分的主要课题是 Stieltjes 积分. 这种积分原则上可纳入 Lebesgue 积分的框架之内，但它独具特色且应用上颇为重要，因此值得专门考察. 而为使 Stieltjes 积分有一个合适的理论框架，广义测度概念是必要的. 广义测度理论内容丰富而深刻，本章的介绍只是最初步的.

本章中设 $[a,b]$ 是有限实区间. 对于 $[a,b]$ 上给定的实函数 $f(x)$，常不加说明地认定在 $(-\infty,a)$ 上 $f(x)=f(a)$，在 (b,∞) 上 $f(x)=f(b)$.

§5.1　单调函数

单调函数是最简单的实函数之一，它具有一系列良好的性质. 本节主要阐明，关于单调函数的连续性与可微性有一些很强的结论；为得出这些结论，需用到本书前几章的知识.

显然只需考虑增函数. 以下设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有限增函数. 由数学分析课程知道，f 在每点 $x\in[a,b]$ 必存在单侧极限 $f(x^+)$ 与 $f(x^-)$：

$$f(x^+)=\lim_{y\downarrow x}f(y),\ f(x^-)=\lim_{y\uparrow x}f(y),$$

其中 $y\downarrow x$ 表示 $y>x$ 且 $y\to x$；$y\uparrow x$ 仿此. 本节中总约定当

$x<a, y>b$ 时 $f(x)=f(a), f(y)=f(b)$. 因此有 $f(a^-)=f(a)$, $f(b^+)=f(b)$. 当 $a \leqslant x<y \leqslant b$ 时恒有

$$f(a) \leqslant f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+) \leqslant f(y^-) \leqslant f(b). \quad (1)$$

$f(x^+)-f(x^-)$称为 f 在 x 处的**跃度**. 显然, f 在 x 连续 $\Leftrightarrow f$ 在 x 的跃度为零, 即 $f(x^-)=f(x^+)$.

5.1.1 定理 增函数 f 在 $[a,b]$ 上至多有可数个间断点, 且只能有第一类间断点.

证 设 D 是 f 的间断点之全体, 其中显然只能有第一类间断点. 每个 $x \in D$ 对应一开区间 $\Delta_x=(f(x^-), f(x^+))$. 当 $x, y \in D$, $x<y$时, 由式(1)得出 $\Delta_x \cap \Delta_y=\varnothing$. 显然$\{\Delta_x: x \in D\}$是一可数集, 因此 D 亦为可数集. □

注意, 5.1.1 只是原则上肯定了增函数具有较好的连续性质. 对一个具体给定的增函数 f, 未必容易明确指出其间断点集 D. 而且, D 仍然可能是很复杂的集; 特别, 它的点未必能依大小顺序排列成一个序列. 下面的例子很能说明问题.

例 1 设 $D=\{x_n: n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ 是任一可数集. 令

$$f(x)=\sum_{x_n<x} 2^{-n}, \quad (2)$$

则易见 f 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数. 今指明 f 恰以 D 为间断点集. 取定 $n \in \mathbf{N}$, 当 $x>x_n$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_n)+2^{-n}+\sum_{x_n<x_k<x} 2^{-k} \\ &\geqslant f(x_n)+2^{-n}, \end{aligned}$$

可见 $f(x_n^+) \geqslant f(x_n)+2^{-n}$, 故 f 在 x_n 间断. 其次, 取定 $x \in \mathbf{R} \backslash D$. $\forall n \in \mathbf{N}$, 取 $y>x$, 使 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不出现在$[x, y)$中. 因

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x)-\sum_{x<x_k<y} 2^{-k} \\ &< f(x)+2^{-n}, \end{aligned}$$

故 $f(x^+)<f(x)+2^{-n}$; 令 $n \rightarrow \infty$得 $f(x^+) \leqslant f(x)$. 同理可证

$f(x^-) \geqslant f(x)$，因此 f 在 x 连续.

现在仍回到一般的增函数 f. 定义 f 的**跳跃函数**为：

$$s(x) = \sum_{\xi < x}[f(\xi^+) - f(\xi^-)] + f(x) - f(x^-). \tag{3}$$

注意，由 5.1.1，(3)右端和式至多含可数个非零项且每项非负，因此它是有意义的. 显然 $s(a) = 0$①；当 $x < y$ 时

$$\begin{aligned} s(y) - s(x) = &\sum_{x < \xi < y}[f(\xi^+) - f(\xi^-)] \\ &+ f(y) - f(x) + f(x^+) - f(y^-). \end{aligned} \tag{4}$$

5.1.2 定理　存在分解 $f = \varphi + s$，其中 φ 是一连续增函数，s 是 f 的跳跃函数.

证　只需证 $\varphi = f - s$ 是连续增函数.

1°　证 φ 单调增. 设 $a \leqslant x < y \leqslant b$，则 $\varphi(x) \leqslant \varphi(y) \Leftrightarrow s(y) - s(x) \leqslant f(y) - f(x)$；由(4)，后者等价于

$$\sum_{x < \xi < y}[f(\xi^+) - f(\xi^-)] \leqslant f(y^-) - f(x^+). \tag{5}$$

为证(5)，只需证：对任何有限集 $\{\xi_i\} \subset (x, y)$ 有

$$\sum_i [f(\xi_i^+) - f(\xi_i^-)] \leqslant f(y^-) - f(x^+).$$

这不难利用式(1)推出.

2°　证 φ 连续. 不妨只证 $\varphi(x) = \varphi(x^-)$ $(a \leqslant x < b)$，为此只需证 $\varphi(x) \geqslant \varphi(x^+)$，即

$$f(x^+) - f(x) \leqslant s(x^+) - s(x),$$

这由明显的不等式 $f(x^+) - f(x) \leqslant s(y) - s(x)$ $(y > x)$ 推出. □

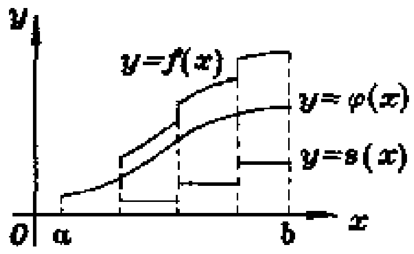


图 5-1

直观上，f 将全部间断与相应的

---

① 记住我们已约定 $f(x) = f(a)$ $(\forall\, x < a)$，因此当 $\xi < a$ 时 $f(\xi^-) = f(\xi^-) = f(a)$；$f(a^-) = f(a)$，从而 $s(a) = 0$.

跃度 $f(x^+)-f(x^-)$转移到了跳跃函数上(参看图 5-1).

对于可微性的讨论要困难些,需用到一些精细的测度论方法.首先给出以下引理.

5.1.3 Vitali 覆盖引理 设 $D=\{d\}$是一长度为正的闭区间族,$E\subset\mathbf{R}$ 有界,$\forall x\in E,\forall\delta>0,\exists d\in D$,使 $x\in d$ 且 $md<\delta$,则存在可数个互不相交的 $d_k\in D$,使得 $m(E\setminus\bigcup d_k)=0$,从而

$$m^*E\leqslant\sum_k md_k.$$

为行文简便起见,约定称 5.1.3 中的区间族 D 为集 E 的一个 **Vitali 覆盖**. 5.1.3 表明,若 D 是 E 的 Vitali 覆盖,则可从中取出可数个互不相交的 d_k,它们"几乎覆盖"了 E. 5.1.3 的证明较繁,放在本章之末.

以下是本节的中心结果,它的证明颇为繁烦,初学者不妨跳过去.但其结论简单明了,且后面多次用到,应当记住.

5.1.4 定理 (Lebesgue) 增函数 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微,且 $f'\in L^1[a,b]$,

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a). \tag{6}$$

证 不妨设 f 严格增加(否则代以 $f(x)+x$). 令

$$\varphi(x)=\varliminf_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

$$\psi(x)=\varlimsup_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

记 $A_p=\{x\in[a,b]:\varphi(x)\leqslant p\}$,$B_q=\{x\in[a,b]:\psi(x)\geqslant q\}$,$E_{pq}=A^p\bigcap B_q$. 显然 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\psi(x)\leqslant\infty$;$f$ 在 x 可微 $\Leftrightarrow\varphi(x)=\psi(x)=f'(x)<\infty$. 因此,$f$ 在 x 不可微 $\Leftrightarrow\varphi(x)<\psi(x)$或 $\psi(x)=\infty$,故 f 的不可微点集 N 可表为:

$$N=\left(\bigcup_{p,q\in\mathbf{Q},p<q}E_{pq}\right)\bigcup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right). \tag{7}$$

1° 对 $A\subset A_p$ 证 $m^*f(A)\leqslant pm^*A$. 为此,只要对任给 $\beta>p$,有界开集 $G\supset A$,证 $m^*f(A)\leqslant\beta mG$(参看 §2.5(8)). $\forall x\in A$,有

充分小的 $d=[x,x+h]\subset G$（约定包括 $h>0$ 与 $h<0$ 两种情况，下同），使

$$|f(x+h)-f(x)|<\beta|h|.$$

所有 $[f(x),f(x+h)]$ 这样的区间构成集 $f(A)$ 的一个 Vitali 覆盖（f 严格增用于此！）. 由 5.1.3，可取出可数个互不相交的区间 $\Delta_k=[f(x_k),f(x_k+h_k)]$，$h_k\neq 0$，使 $m^*f(A)\leqslant\sum m\Delta_k$，$d_k=[x_k,x_k+h_k]\subset G$，$m\Delta_k\leqslant\beta|h_k|$. 于是

$$m^*f(A)\leqslant\beta\sum_k md_k=\beta m(\bigcup_k d_k)\leqslant\beta mG.$$

2°　对 $B\subset B_q$ 证 $m^*f(B)\geqslant qm^*B$. 不妨设 $q>0$. 令 $A=f(B)$，则要证者为 $m^*f^{-1}(A)\leqslant q^{-1}m^*A$. 这可将已证的 1° 用到反函数 f^{-1} 得出，请读者自证（注意避开 f 的可数个间断点）.

3°　证 $mN=0$. 当 $p<q$ 时，由已证的 1°，2° 有

$$m^*f(E_{pq})\leqslant pm^*E_{pq}\leqslant qm^*E_{pq}\leqslant m^*f(E_{pq}),$$

这推出 $pm^*E_{pq}=qm^*E_{pq}$，从而 $mE_{pq}=0$. 其次，

$$\begin{aligned}m^*(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k)&\leqslant m^*B_n\leqslant n^{-1}m^*f(B_n)\\&\leqslant n^{-1}[f(b)-f(a)]\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

故 $m(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)=0$. 于是由(7)得出 $mN=0$.

4°　证不等式(6). 令 $\varphi_n(x)=n[f(x+n^{-1})-f(x)](n=1,2,\cdots)$，则 $\varphi_n\to f'$，a.e.，可见 f' 是 $[a,b]$ 上的非负可测函数. 由 Fatou定理(3.3.3)，有

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x&\leqslant\varliminf_n\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x\\&=\varliminf_n n\int_a^b[f(x+n^{-1})-f(x)]\mathrm{d}x\\&=\varliminf_n n\Big[\int_{a+1/n}^{b+1/n}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big]\\&=\varliminf_n n\Big[\frac{1}{n}f(b)-\int_a^{a+1/n}f(x)\mathrm{d}x\Big]\end{aligned}$$

$$\leqslant f(b) - f(a).$$ □

尽管 5.1.4 确证了增函数 f 的不可微点集 N 在测度意义上是微不足道的，但如下例所指明的，N 仍然可能是很复杂的集.

例 2 设 $A \subset [a,b]$是任一零测集. 取开集 $G_n \supset A$，使 $mG_n < 2^{-n}(n = 1,2,\cdots)$. 令 $\varphi_n(x) = m(G_n \cap [a,x])$，则 φ_n 显然是连续增函数，且 $|\varphi_n| < 2^{-n}(n = 1,2,\cdots)$，从而 $f = \sum \varphi_n$ 是$[a,b]$上的连续增函数. 取定 $x_0 \in A$. $\forall n \in \mathbf{N}$，当$|h| > 0$ 充分小时$[x_0, x_0 + h] \subset G_k (1 \leqslant k \leqslant n)$. 于是由 φ_n 的定义易见

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x_0 + h) - \varphi_k(x_0)}{h} = n,$$

可见 $f'(x_0) = \infty$. 这表明 f 在 A 上每点不可微.

如下例所指明的，(6)可能为严格不等式.

例 3 设 P 是 Cantor 集. 定义 f 如下：$\forall n \in \mathbf{N}$，在 P 的 2^{n-1}个长为 3^{-n}的余区间上，f 依次取常数：

$$2^{-n}, 3 \cdot 2^{-n}, 5 \cdot 2^{-n}, \cdots, (2^n - 1) \cdot 2^{-n}.$$

令 $f(0) = 0$；当 $x \in P \setminus \{0\}$时令

$$f(x) = \sup_{x > y \in G} f(y),$$

其中 $G = [0,1] \setminus P$. 容易看出 f 是 $[0,1]$ 上的连续增函数，在 G 内 $f'(x) = 0$，于是

$$\int_0^1 f'(x) \mathrm{d}x = 0 < 1 = f(1) - f(0).$$

§5.2 有界变差函数

单调函数类固然有特殊价值，但毕竟失之过窄，而且还有一重大缺陷：两个单调函数的和未必是单调函数. 一个函数类能否对线性运算(即加法和数乘运算)封闭，在现代分析数学中是至关重要的. 因此，必须考虑比单调函数类更大且对线性运算封闭的函数类. 符合这

一要求的最小的函数类，就是本节所要介绍的"有界变差函数"类.有界变差函数保留了单调函数的主要性质：几乎处处可微且导函数 L 可积，同时又有一定的广泛性，因而在分析学中占有重要地位.

以下设 $f:\ [a,b]\to\mathbf{R}$. 当 $P=\{x_i\}$ 满足

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b \tag{1}$$

时，称 P 是区间 $[a,b]$ 的一个分划. 约定

$$\begin{cases} J_i=[x_{i-1},x_i],\Delta x_i=x_i-x_{i-1} \\ \Delta f(x_i)=f(x_i)-f(x_{i-1}),i=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{2}$$

本节及以下几节将多次使用这些记号.

5.2.1 定义　对 $[a,b]$ 的任给分划 $P=\{x_i\}$，令

$$V(f,P)=\sum_i|\Delta f(x_i)|; \tag{3}$$

$$V_a^b(f)=\sup_P V(f,P) \tag{4}$$

(上式右端是对 $[a,b]$ 的所有可能的分划 P 取上确界). 称 $V_a^b(f)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差. 若 $V_a^b(f)<\infty$，则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

全变差 $V_a^b(f)$ 与积分 $\int_a^b f\mathrm{d}x$ 有若干类似之处. 但它们的差别也很明显：$V_a^b(f)$ 恒存在，且总是非负的；$V_a^b(f)$ 对 f 一般不是线性的，等等.

约定以 BV 或 BV$[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上的有界变差函数之全体.

下例指明了有界变差函数的直观意义.

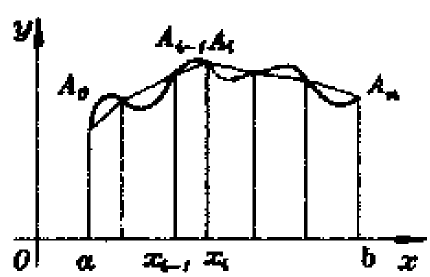


图 5-2

例 1　设曲线 L 由方程 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给定. 在 L 上顺次取点 $A_i(x_i,f(x_i))$ $(0\leqslant i\leqslant n)$，$\{A_i\}$ 对应区间 $[a,b]$ 的分划 $P=\{x_i\}$(图 5-2). 连结点 $A_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 的折线之长度为 $\sum|A_{i-1}A_i|$. 很自然地，将 L 的长 s

定义为

$$s = \sup \sum_i |A_{i-1}A_i|,$$

上确界是对所有可能的点组 $\{A_i\}$ 取的. 若 $s < \infty$, 则称 L 为**可度曲线**. 因 $|A_{i-1}A_i|^2 = |\Delta f(x_i)|^2 + |\Delta x_i|^2$, 故

$$|\Delta f(x_i)| \leqslant |A_{i-1}A_i| \leqslant |\Delta f(x_i)| + \Delta x_i.$$

由此直接看出: L 为可度曲线 $\Leftrightarrow f \in \mathrm{BV}$.

一般地, 若曲线 L 由参数方程

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)\ (a \leqslant t \leqslant b)$$

给定, 则 L 是可度曲线 $\Leftrightarrow f, g, h \in \mathrm{BV}$(见本章习题 6). 这样, 利用有界变差函数完全刻画了曲线的可度性. 这一事实足以表明有界变差函数的重要性.

以下命题综合了有界变差函数的一些简单性质.

5.2.2 命题 (i) 若 $f \in \mathrm{BV}$, 则 f 有界.

(ii) 若 $f, g \in \mathrm{BV}$, 则 $f \pm g, fg \in \mathrm{BV}$.

(iii) 若 $f, g \in \mathrm{BV}$, $|g| \geqslant c > 0$, 则 $f/g \in \mathrm{BV}$.

(iv) 若 $f, g \in \mathrm{BV}$, 则 $|f|, f^+, f^-, f \vee g, f \wedge g \in \mathrm{BV}$.

证 (i) $\forall x \in (a, b)$, $P = \{a, x, b\}$ 是 $[a, b]$ 的一个分划, 因此

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \\ &\leqslant |f(a)| + V_a^b(f),\end{aligned}$$

这表明 f 有界.

(ii) 设 $f, g \in \mathrm{BV}$. 直接看出 $f \pm g \in \mathrm{BV}$. 设 $|f| \leqslant \alpha$, $|g| \leqslant \beta$, $\{x_i\}$ 是 $[a, b]$ 的任一分划, $h = fg$, 则易见

$$|\Delta h(x_i)| \leqslant \beta|\Delta f(x_i)| + \alpha|\Delta g(x_i)|,$$

由此推出 $V_a^b(h) \leqslant \beta V_a^b(f) + \alpha V_a^b(g)$, 因此 $fg \in \mathrm{BV}$.

(iii) 若 $|g| \geqslant c > 0$, 则

$$\left|\frac{1}{g(x_i)} - \frac{1}{g(x_{i-1})}\right| \leqslant \frac{1}{c^2}|\Delta g(x_i)|.$$

这结合(ii)得出(iii).

(iv) 当 $f\in \mathrm{BV}$ 时显然 $|f|\in \mathrm{BV}$. 余下的结论由

$$f\vee g=\frac{1}{2}(|f-g|+f+g)$$

及类似表达式得出. □

5.2.3 命题 设 $a<c<b$, 则 $V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$.

证 设 $P=\{x_i\}$ 是 $[a,b]$ 的一个分划, $c\in J_k$, 则

$$\begin{aligned}V(f,P)&\leqslant\Big[\sum_{i<k}|\Delta f(x_i)|+|f(c)-f(x_{k-1})|\Big]\\&\quad+\Big[f(x_k)-f(c)|+\sum_{i>k}|\Delta f(x_i)|\Big]\\&\leqslant V_a^c(f)+V_c^b(f),\end{aligned}$$

这推出 $V_a^b(f)\leqslant V_a^c(f)+V_c^b(f)$. 另一方面, 任给 $[a,c]$ 的分划 $P'=\{x_i: 0\leqslant i\leqslant k\}$ 与 $[c,b]$ 的分划 $P''=\{x_i: k\leqslant i\leqslant n\}$, 令 $P=\{x_i: 0\leqslant i\leqslant n\}$, 则

$$V(f,P')+V(f,P'')=V(f,P)\leqslant V_a^b(f),$$

由此得 $V_a^c(f)+V_c^b(f)\leqslant V_a^b(f)$. 于是命题得证. □

5.2.3 可与定积分的可加性类比.

以下是关于有界变差函数的最重要的结论.

5.2.4 定理 $f\in\mathrm{BV}\Leftrightarrow f$ 是两增函数之差.

证 若 f 是增函数, 则直接看出 $V_a^b(f)=f(b)-f(a)$, 因此 $f\in\mathrm{BV}$. 这又推出: 若 f 是两增函数之差, 则 $f\in\mathrm{BV}$.

反之, 若 $f\in\mathrm{BV}$, 令 $\pi(x)=V_a^x(f)$, $\nu=\pi-f$, 则 $f=\pi-\nu$. 若 $a\leqslant x<y\leqslant b$, 则

$$\pi(y)-\pi(x)=V_x^y(f)\geqslant 0;\quad (\text{用 } 5.2.3)$$

$$\nu(y)-\nu(x)=V_x^y(f)-[f(y)-f(x)]\geqslant 0,$$

可见 π,ν 均为增函数. □

4.2.4 的意义在于, 利用它可将关于单调函数的一些结论转移到有界变差函数. 例如有

5.2.5 推论 若 $f\in\mathrm{BV}$, 则它有以下性质:

(i) f 至多有可数多个间断点，且只能有第一类间断点.

(ii) 有分解 $f=\varphi+s$，φ 是连续有界变差函数，而

$$s(x)=\sum_{\xi<x}[f(\xi^+)-f(\xi^-)]+f(x)-f(x^-). \qquad (5)$$

(iii) f 几乎处处可微，且 $f'\in L^1$.

证 只需证(ii). 设 $f=g-h$，g,h 是增函数，s_1,s_2 分别为 g 与 h 的跳跃函数，则利用上节式(3)看出 $s=s_1-s_2$ 恰如式(5). 而由 5.1.2 及 5.2.4 推出

$$\varphi=(g-s_1)-(h-s_2)$$

是连续有界变差函数，故 $f=\varphi+s$ 为所求分解. □

例 2 设 $\alpha>0$，$f(x)=x^\alpha\sin x^{-1}(0<x\leqslant 1)$，$f(0)=0$. 判定 f 在区间 $[0,1]$ 上是否为有界变差函数.

解 首先求出 f'：

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin x^{-1}-x^{\alpha-2}\cos x^{-1}(0<x\leqslant 1).$$

若 $0<\alpha\leqslant 1$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x&\geqslant\int_0^1 x^{\alpha-2}\left|\cos\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_0^1\frac{1}{x}\left|\cos\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x-\mathrm{const}\\&=\int_1^\infty\frac{|\cos t|}{t}\mathrm{d}t-\mathrm{const}=\infty,\end{aligned}$$

可见 $f'\notin L^1$(3.4.2)，从而 $f\notin \mathrm{BV}$(5.2.5(iii)).

若 $\alpha>1$，则由 $|f'(x)|\leqslant\mathrm{const}\cdot x^{\alpha-2}$ 看出 $f'\in L^1$. 因 f 在 $[0,1]$上连续，f' 在$(0,1]$上连续，故用 Newton-Leibniz 公式得出：

$$\begin{aligned}\sum_i|\Delta f(x_i)|&=\sum_i\left|\int_{J_i}f'(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_i\int_{J_i}|f'(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中$\{x_i\}$是区间$[0,1]$的一个分划(记号依(2)). 于是

$$V_0^1(f) \leqslant \int_0^1 |f'(x)| \mathrm{d}x < \infty,$$

从而 $f \in \mathrm{BV}$.

本章中将用到有界变差函数的另一种分解①. 设 $f \in \mathrm{BV}$, $V(f,P)$依式(3). 令

$$V_+(f,P) = \sum \{\Delta f(x_i): \Delta f(x_i) \geqslant 0\};$$

$$V_-(f,P) = \sum \{-\Delta f(x_i): \Delta f(x_i) < 0\},$$

则

$$V_+(f,P) + V_-(f,P) = V(f,P); \tag{6}$$

$$V_+(f,P) - V_-(f,p) = f(b) - f(a). \tag{7}$$

令

$$V_{a\pm}^b(f) = \sup_P V_\pm(f,P), \tag{8}$$

其中上确界是对区间 $[a,b]$ 的所有可能的分划 P 取的. 分别称 $V_{a+}^b(f)$与 $V_{a-}^b(f)$为 f 在 $[a,b]$ 上的**正变差与负变差**. 进而令

$$p(x) = V_{a+}^x(f), \; n(x) = V_{a-}^x(f), \tag{9}$$

$p(x)$与 $n(x)$亦分别称为 f 的正变差与负变差. 结合式(6)～(9)得出:

$$p(x) + n(x) = V_a^x(f) = \pi(x); \tag{10}$$

$$p(x) - n(x) = f(x) - f(a). \tag{11}$$

5.2.6 定理　若 $f \in \mathrm{BV}$,则 f 有"标准分解"(11),其中 $p(x)$与 $n(x)$分别为 f 的正变差与负变差. 若有 $[a,b]$ 上的增函数 p_1, n_1,使 $p_1(a) = n_1(a) = 0, f(x) - f(a) = p_1(x) - n_1(x)$,则 $p_1 - p$ 与 $n_1 - n$都是非负增函数.

证　只需证后半部分. 因 $p_1 - p = n_1 - n$,故只需证 $p_1 - p$ 是增函数. 设 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$. $\forall\, \epsilon > 0$,有 $[\alpha,\beta]$ 上有限个互不相交的区间(α_i,β_i),使得

① 本节以下内容初次阅读时可以略去.

$$V_{a-}^{\beta}(f) < \sum_i [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] + \varepsilon$$
$$\leqslant \sum_i [p_1(\beta_i) - p_1(\alpha_i)] + \varepsilon$$
$$\leqslant p_1(\beta) - p_1(\alpha) + \varepsilon.$$

这推出 $p(\beta)-p(\alpha) \leqslant p_1(\beta)-p_1(\alpha)$，即

$$p_1(\alpha) - p(\alpha) \leqslant p_1(\beta) - p(\beta).$$

这表明 $p_1 - p$ 是 $[a,b]$ 上的增函数. □

§5.3 绝对连续函数

本节考虑一类特殊的连续有界变差函数，它被成功地用来解决 L 积分的 Newton-Leibniz 公式问题.

5.3.1 定义 设 $f:[a,b]\to \mathbf{R}$. 若$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当(a_k,b_k)是$[a,b]$中有限个互不相交的区间且 $\sum (b_k - a_k) < \delta$ 时，恒有

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon,$$

则说 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

约定以 AC 或 AC $[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上的绝对连续函数之全体.

能由定义直接得出的绝对连续函数的性质如下：

5.3.2 命题 (i) 若 $f\in$ AC，则 f 是连续的有界变差函数.

(ii) 若 $f,g\in$ AC，则 $f\pm g$，fg，f/g(若$|g|>0$)，$|f|$，f^+，f^-，$f\vee g$，$f\wedge g$ 等皆为绝对连续函数.

证 只证(i)，(ii)由读者自己证明. 设 $f\in$ AC，则显然 f 连续. 取定 $\varepsilon>0$，取 δ 如 5.3.1. 设$\{x_i: 0\leqslant i\leqslant n\}$是$[a,b]$的一个分划，满足 $\Delta x_i<\delta(1\leqslant i\leqslant n$，记号依上节(2)). 若$\{\xi_{ij}: 0\leqslant j\leqslant n_i\}$是 J_i 的一个分划，则由 5.3.1 有 $\sum\limits_j |\Delta f(\xi_{ij})| < \varepsilon$，这得出 $V_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant \varepsilon$，因而 $V_a^b(f)\leqslant n\varepsilon$. □

与绝对连续函数有关的是另一类更特殊的函数.

5.3.3 定义 设 $X \subset \mathbf{R}^n$，$f: X \to \mathbf{R}$. 若存在常数 $L>0$，使得

$$|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y| (\forall x,y \in X), \tag{1}$$

则称 f 为 Lipschitz 函数，或说 f 满足"Lipschitz 条件"

约定以 Lip 或 Lip(X)记 X 上的 Lipschitz 函数之全体.

直接看出，若 $f\in \mathrm{Lip}\,[a,b]$，则必 $f\in \mathrm{AC}$. 另一方面，若 f 在 $[a,b]$ 上连续可微(C^1 是这类函数的通用记号)，则必定 $f\in \mathrm{Lip}$ (请证之!). 这样，本章涉及的几类函数的相互关系如下：

$$C^1 \subset \mathrm{Lip} \subset \mathrm{AC} \subset \mathrm{BV} \supset M, \mathrm{AC} \subset C, \tag{2}$$

其中 C,M 分别记连续函数类与单调函数类.

关于 R 积分有如下熟知结论：若 g 在$[a,b]$上 R 可积，则"不定积分"

$$f(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

在$[a,b]$上连续，且在 g 的连续点 x 有 $f'(x)=g(x)$. 以下是一个深刻得多的推广.

5.3.4 定理 设 $g\in L^1[a,b]$，f 表为式(3)，则 $f\in \mathrm{AC}$，且 $f'=g$，a.e..

证 1° 证 $f\in \mathrm{AC}$. $\forall\, \varepsilon>0$，由 3.2.8 可取 $\delta>0$，使当 $e\subset [a,b]$，$me<\delta$ 时有 $\int_e |g|\mathrm{d}m<\varepsilon$. 设 $I_k=(a_k,b_k)$ 是 $[a,b]$ 中有限个互不相交的区间，$\sum mI_k<\delta$，则

$$\sum_k |f(b_k)-f(a_k)| = \sum_k \left|\int_{I_k} g\mathrm{d}m\right| \leqslant \sum_k \int_{I_k} |g|\mathrm{d}m$$
$$= \int_{\cup I_k} |g|\mathrm{d}m < \varepsilon,$$

可见 $f\in \mathrm{AC}$.

2° 证 $f'=g$，a.e.. $\forall\, \varepsilon>0$，取 $h\in C[a,b]$，使得 $\|g-h\|_1<\varepsilon$ (4.2.3). 令 $\varphi=g-h$，

$$\Phi_+(x) = \int_a^x \varphi^+(t)\mathrm{d}t\,(a\leqslant x\leqslant b), \tag{4}$$

$\Phi_-(x)$仿此，则 Φ_+,Φ_- 均为增函数，于是由 5.1.4 有

$$\int_a^b \Phi'_+(x)\mathrm{d}x \leqslant \Phi_+\Big|_a^b = \int_a^b \varphi^+(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

对 Φ_- 有类似不等式. 现在得出以下估计：

$$\begin{aligned}
\| f' - g \|_1 &\leqslant \| f' - h \|_1 + \| h - g \|_1 \\
&< \int_a^b \left| \left\{ \int_a^x [g(t) - h(t)]\mathrm{d}t \right\}' \right| \mathrm{d}x + \varepsilon \\
&= \int_a^b |\Phi'_+(x) - \Phi'_-(x)|\mathrm{d}x + \varepsilon \\
&\leqslant \int_a^b [\Phi'_+(x) + \Phi'_-(x)]\mathrm{d}x + \varepsilon \\
&\leqslant \int_a^b [\varphi^+(x) + \varphi^-(x)]\mathrm{d}x + \varepsilon \quad (\text{用}(5)) \\
&= \int_a^b |\varphi(x)|\mathrm{d}x + \varepsilon \qquad (|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-) \\
&= \| g - h \|_1 + \varepsilon < 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

这推出 $\| f' - g \|_1 = 0$，即 $f' = g$，a. e.. □

与 R 积分论中的类似结论相比，5.3.4 的应用范围要广泛得多. 以下例子颇能说明问题，表面上看，它与不定积分似无关系.

例 1 设 $A \subset [a,b]$，$mA < b - a$，则 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在非空开区间 $\Delta \subset (a,b)$，使 $m(A \cap \Delta) \leqslant \varepsilon m\Delta$.

证 若所述结论不真，则 $\exists\, \varepsilon > 0$，对任何非空开区间 $\Delta \subset (a,b)$，有 $m(A \cap \Delta) > \varepsilon m\Delta$. 令

$$f(x) = \int_a^x \chi_A \mathrm{d}m,$$

则当 $a \leqslant x < y \leqslant b$ 时有

$$f(y) - f(x) = m(A \cap (x,y)) > \varepsilon(y - x).$$

这推出当 $f'(x)$存在时 $f'(x) \geqslant \varepsilon$. 于是由 5.3.4 有 $\chi_A \geqslant \varepsilon$，a. e.，从而 $\chi_A = 1$，a. e.，这意味着 $mA = b - a$，得出矛盾.

在 § 3.1 中已提到关于 R 积分的 Newton-Leibniz 公式. 在稍精细的形式下，它可表述为：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，$f'(x)$在 $[a,b]$ 上

存在(或至多有限个点例外),且 f' 在 $[a,b]$ 上 R 可积,则

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a);$$

或更一般地,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{6}$$

与要求"f' 连续"相比,以上条件已经大大放宽.但要求"f' 为 R 可积"仍然是一个很强的限制.倘用 L 积分,就可得到以下深刻得多的推广.

5.3.5 定理 Newton-Leibniz 公式(6)成立的充要条件是 $f \in$ AC,(6)中的积分理解为 L 积分.

证 若式(6)成立,则由 5.3.4 知 $f \in$ AC.

以下设 $f \in$ AC.由 5.3.2(i),$f' \in L^1$.令

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

由 5.3.4,$\varphi \in$ AC,且 $\varphi' = 0$,a.e..今证 $\varphi(x) \equiv 0$(这意味着式(6)成立).为此只需证 $\varphi(b) = 0$(以 $[a,x]$ 代 $[a,b]$ 即得 $\varphi(x) = 0$).$\forall \varepsilon > 0$,取 $\delta > 0$ 如 5.3.1(但以 φ 代 f).取开集 G,使

$$G \supset [a,b] \setminus \{x:\ \varphi'(x) = 0\},$$

且 $mG < \delta$,若 $\varphi'(x) = 0$,则有 $h>0$,使得 $\forall\ y \in I_x \triangleq (x-h, x+h)$,有 $|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon|y-x|$.所有如上的区间 I_x 与 G 的构成区间一起组成 $[a,b]$ 的开覆盖,从中取出有限个区间覆盖 $[a,b]$.然后适当加入分点得到 $[a,b]$ 的一个分划 $\{x_i\}$,分点的添加法如图 5-3 所示.设 $J_i = (x_{i-1}, x_i)$.若 $J_i \not\subset G$,则对某个 $I_x = (x-h, x+h)$ 有 $J_i \subset (x-h, x)$ 或 $J_i \subset (x, x+h)$.于是

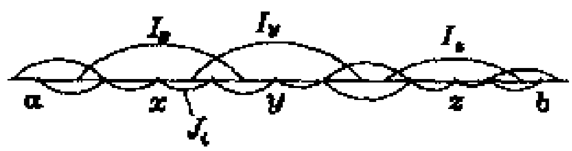


图 5-3

$$|\varphi(b)| = |\varphi(b) - \varphi(0)| \leqslant \sum |\Delta\varphi(x_i)|$$
$$= \sum_{J_i \subset G} |\Delta\varphi(x_i)| + \sum_{J_j \not\subset G} |\Delta\varphi(x_j)|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon \sum_{J_j \not\subset G} mJ_j \leqslant \varepsilon(1 + b - a),$$

这得出 $\varphi(b) = 0$. □

再回到定理 5.3.4. 它固然是一个深刻的结果，但对具体确定那些使 $f'(x) = g(x)$ 的点 x，却无所为用. 在很多分析问题（例如 Fourier 分析）中，需要用到以下概念①.

5.3.6 定义 设 $g \in L^1[a,b]$. 若 $x \in [a,b]$ 满足

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |g(t) - g(x)| \mathrm{d}t = 0, \tag{7}$$

则称 x 为 g 的 Lebesgue 点，或简称 L-点.

g 的连续点显然是 L-点，但 L-点未必是连续点. 例如，Dirichlet 函数 $D = \chi_Q$ 处处不连续，但它以每个无理点 x 为 L-点：

$$\frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |D(t) - D(x)| \mathrm{d}t = 0 \ (h > 0).$$

若 x 是 g 的 L-点，f 依式(3)，则当 $h \to 0$ 时

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \leqslant \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |g(t) - g(x)| \mathrm{d}t \to 0,$$

从而 $f'(x) = g(x)$. 因此，x 为 L-点是使

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x g(t) \mathrm{d}t = g(x)$$

成立的充分条件，但并非必要条件.

5.3.7 定理 设 $g \in L^1[a,b]$，则几乎所有的 $x \in [a,b]$ 是 g 的 L-点.

① 本节以下内容在第一次阅读时可略去.

证　令 $\mathbf{Q}=\{r_n:\ n\in\mathbf{N}\}$，$A_n$ 是使

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x|g(t)-r_n|\mathrm{d}t=|g(x)-r_n|$$

不成立的点之全体，则由 5.3.4 有 $mA_n=0\ (n=1,2,\cdots)$，从而 $A=\bigcup A_n$ 是零测集. 若 $x\in[a,b]\setminus A$，$g(x)\neq\infty$，则

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|g(t)-g(x)|\mathrm{d}t\\ \leqslant&\inf_n\left[\overline{\lim_{h\downarrow 0}}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|g(t)-r_n|\mathrm{d}t+2|g(x)-r_n|\right]\\ =&\inf_n 4|g(x)-r_n|=0,\end{aligned}$$

可见 x 是 g 的 L-点. □

△§ 5.4　凸函数

本节介绍的凸函数，与单调函数、绝对连续函数有密切的联系. 分析学中的许多问题与凸函数有关. 而近年来凸分析理论的深入发展与广泛应用，大大激发了对凸函数的研究兴趣. 对凸函数有某种程度的了解，显然是十分必要的.

本节约定 $I\subset\mathbf{R}$ 是一区间（开或闭的，或半闭的），$f:\ I\to\mathbf{R}$，$J=[0,1]$；$\forall\ t\in J$，以 t' 记 $1-t$.

5.4.1 定义　若 $\forall\ x,y\in I$，$\forall\ t\in J$，成立

$$f(tx+t'y)\leqslant tf(t)+t'f(y),\tag{1}$$

则称 f 为 I 上的凸函数. 若当 $x\neq y$，$t\in(0,1)$时，(1)恒为严格不等式，则称 f 为严格凸函数. 若 $-f$ 为凸（或严格凸）函数，则称 f 为凹（或严格凹）函数.

设 $x<y$，则条件(1)相当于

$$f(x)\leqslant\frac{y-z}{y-x}f(x)+\frac{z-x}{y-x}f(y)\ (x\leqslant z\leqslant y).\tag{2}$$

若 f 为凸函数，则用归纳法易将不等式(1)推广为

$$f\Big(\sum_i t_i x_i\Big) \leqslant \sum_i t_i f(x_i), \tag{3}$$

其中 $t_i\in J, x_i\in I(1\leqslant i\leqslant n)$，$\sum t_i=1$. (3)通常称为 **Jensen 不等式**.

对于连续函数，可将凸性条件(1)减弱为：

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}[f(x)+f(y)], x,y\in I. \tag{4}$$

5.4.2 定理 若 f 连续且满足条件(4)，则 f 是凸函数.

证 以 T 记使(1)对任何 $x,y\in I$ 满足的 $t\in J$ 之全体，则 $0,1,1/2\in T$. $\forall\, t_1,t_2\in T$，令 $t=(t_1+t_2)/2$，则对任给 $x,y\in I$ 有

$$\begin{aligned}
f(tx+t'y) &= f\Big(\frac{(t_1x+t_1'y)+(t_2x+t_2'y)}{2}\Big)\\
&\leqslant \frac{1}{2}[f(t_1x+t_1'y)+f(t_2x+t_2'y)]\\
&\leqslant \frac{1}{2}[t_1f(x)+t_1'f(y)+t_2f(x)+t_2'f(y)]\\
&= tf(x)+t'f(y),
\end{aligned}$$

可见 $t\in T$. 由此推出 T 在 J 中稠密.

给定 $x,y\in I, t\in J$. 取 $t_n\in T$，使 $t_n\to t$. 则

$$\begin{aligned}
f(tx+t'y) &= \lim_n f(t_nx+t_n'y)\\
&\leqslant \lim_n[t_nf(x)+t_n'f(y)]\\
&= tf(x)+t'f(y),
\end{aligned}$$

这表明 f 是凸函数. □

若 f 不连续，则条件(4)不足以保证 f 为凸函数.

凸函数有一系列很特殊的性质.

5.4.3 定理 若 f 是 I 上的凸函数，则 f 在 I 内部的任何闭区间 $[a,b]$ 上为 Lipschitz 函数.

证 在 I 内部取闭区间$[\alpha,\beta]$，使$[a,b]\subset(\alpha,\beta)$.

1° 证 f 在$[\alpha,\beta]$上有界，$\forall\, x\in[\alpha,\beta]$，由(2)有

$$f(x) \leqslant \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} f(\beta)$$
$$\leqslant \max\{f(\alpha), f(\beta)\},$$

可见 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上有上界. 若 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上下方无界，则有 $x_n \in [\alpha,\beta]$ 使 $f(x_n) \to -\infty$. 可设 $x_n \to x_0$ 且不妨设 $x_n \downarrow x_0$. 取 $x \in (x_0,\beta)$，则

$$f(x) \leqslant \varlimsup_n \left[\frac{\beta - x}{\beta - x_n} f(x_n) + \frac{x - x_n}{\beta - x_n} f(\beta)\right] = -\infty,$$

得出矛盾.

2° 取 $M > 0$，使 $|f(x)| \leqslant M (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$. 设 $a \leqslant x < y \leqslant b$，则用不等式(2)得

$$f(x) \leqslant \frac{y - x}{y - \alpha} f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{y - \alpha} f(y);$$

$$f(x) - f(y) \leqslant \frac{y - x}{y - \alpha} f(\alpha) + \left(\frac{x - \alpha}{y - \alpha} - 1\right) f(y)$$
$$= \frac{y - x}{y - \alpha}[f(\alpha) - f(y)]$$
$$\leqslant \frac{2M}{a - \alpha}(y - x).$$

同理可得

$$f(y) - f(x) \leqslant \frac{y - x}{\beta - x}[f(\beta) - f(x)]$$
$$\leqslant \frac{2M}{\beta - b}(y - x).$$

令 $L = \max\{2M/(a-\alpha), 2M/(\beta-b)\}$，则

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| \quad (\forall\, x,y \in [a,b]).$$

这表明 $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$. □

值得注意的是，即使 f 在闭区间 I 上为凸函数，也不能保证 f 在 I 上满足 Lipschitz 条件.

例 1 设 $f(x) = -\sqrt{x}$，则 f 在 $[0,\infty)$ 上为凸函数(这可由 $f''(x) > 0$ 得出). 取 $x_n = n^{-2}, y_n = (n+1)^{-2} (n = 1,2,\cdots)$，则

$$\left|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n}}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2n+1} \to \infty \ (n\to\infty).$$

这表明 f 在$[0,1]$上不满足 Lipschitz 条件.

结合 5.4.3 与上节的结果得出：

5.4.4 推论 设 f 在 I 上为凸函数. 则

(i) f 在 I 内部的每个闭区间上绝对连续，在 I 内部连续.

(ii) f 在 I 上几乎处处可微，且 f' 在 I 内部任何闭区间上 L 可积.

(iii) 设 x_0,x 是 I 的内点，则成立

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

注意，即使 f 在闭区间 I 上为凸函数，f 也未必在端点连续. 例如，$f=\chi_{\{1,\infty)}$显然在$[0,1]$上为凸函数，但在 $x=1$ 处不连续.

就凸函数的连续性而言，对 5.4.4 已提不出什么改进了. 但 5.4.4 对凸函数的微分性质所提供的信息还远远不够. 下面是更精细的结果.

5.4.5 定理 设 f 是 I 上的凸函数.

(i) 若 x 为 I 的内点，则左、右导数 $f'_-(x)$与 $f'_+(x)$ 皆存在.

(ii) 若 x,z 是 I 的内点且 $x<z$，则

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(z). \tag{6}$$

因此 f'_-与 f'_+在 I 内部为增函数，f' 在 I 内部有定义的点集上为增函数.

(iii) 若 f 可微，则 f' 在 I 内部为连续增函数；f'' 在 I 上几乎处处存在，且 $f''\geqslant 0$，a.e..

证 设 x,y,z 是 I 的内点，$x<y<z$，则利用不等式(2)不难推出

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}. \tag{7}$$

(i) (7)表明当 x 固定时 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ 分别对 $y<x$ 与 $y>x$ 单调增，因此 $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 均存在.

(ii) 在(7)中令 $x\uparrow y, z\downarrow y$，得 $f'_-(y)\leqslant f'_+(y)$. 这一不等式自然亦适用于 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$. 在(7)中令 $y\downarrow x$ 得

$$f'_+(x)\leqslant\frac{f(z)-f(x)}{z-x};$$

再用(7)得

$$f'_+(x)\leqslant\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

在以上不等式中令 $y\uparrow z$ 得 $f'_+(x)\leqslant f'_-(z)$.

(iii) 若 f 可微，则由已证之(ii)知 f' 在 I 内部为增函数. 从数学分析课程熟知，f' 具有介值性质，即当 f 在 $[a,b]$ 上可微时，在 $[a,b]$ 上 $f'(x)$ 取得介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切值. 因此 f' 不能有第一类间断点. 这就得出 f' 在 I 内部连续. 余下结论由 5.1.4 得出. □

§5.5 Riemann-Stieltjes 积分

在熟悉了若干重要函数类之后，现在又回到本书重点考虑的积分问题.

本节所考虑的积分是 Riemann 定积分的一种推广，它在很多数学问题中以自然的形式出现. 以下就是一个例子. 设 L 是由方程 $y=g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给定的平面曲线，$P(x,y)$ 是定义于 L 上的函数，令 $f(x)=P(x,g(x))$. 从微积分学中熟知，曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}y$ 定义为：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}y=\lim\sum P(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

$$=\lim\sum f(\xi_i)\Delta g(x_i), \qquad (1)$$

其中$\{x_i\}$是区间$[a,b]$的任一分划，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$\eta_i=g(\xi_i)$，$\Delta y_i=\Delta g(x_i)=g(x_i)-g(x_{i-1})(1\leqslant i\leqslant n)$，极限是对$\max\limits_i(x_i-x_{i-1})\to 0$取的. 形如(1)的“和式极限”还出现在其他许多问题中，将其概括为某种形式的积分是有价值的.

以下设$f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$，沿用§5.2所约定的记号(参看§5.2(2)).

5.5.1 定义 对$[a,b]$的任给分划$P=\{x_i\}$及取点$\xi_i\in J_i=[x_{i-1},x_i]$，作成和式

$$S_P(f,g)=\sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i). \tag{2}$$

令$\lambda=\max\limits_i\Delta x_i$. 若极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}S_P(f,g)$存在且有限，则称它为“函数对”$(f,g)$在区间$[a,b]$上的 Riemann-Stieltjes 积分，简称为 RS 积分，记作

$$\int_a^b f\mathrm{d}g \quad 或 \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x),$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i). \tag{3}$$

利用以上定义，现在可将式(1)表为：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b P(x,g(x))\mathrm{d}g(x).$$

积分$\int_a^b f\mathrm{d}g$的几种特殊情况如下：

1° 若$g(x)\equiv x$，则$\int_a^b f\mathrm{d}g$就是R积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 可见RS积分涵盖了R积分. 一般地，当g是增函数时，积分$\int_a^b f\mathrm{d}g$与R积分$\int_a^b f\mathrm{d}x$有更多的类似之处.

2° 若$g(x)\equiv\mathrm{const}$，则显然$\int_a^b f\mathrm{d}g=0$.

3° 若$f(x)\equiv c$，则由(3)有$\int_a^b f\mathrm{d}g=c[g(b)-g(a)]$.

在式(3)中，函数 f 与 g 明显地处于不对称的地位.但实际上，在与积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 的关系上，f 与 g 有某种对称性，这表现于以下的**分部积分公式**：

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = fg\Big|_a^b - \int_a^b g\mathrm{d}f, \tag{4}$$

只要式(4)中两个 RS 积分之一存在，另一个就必定存在.公式(4)的证明如下：设

$$a = \xi_0 = x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant \xi_n \leqslant x_n = \xi_{n+1} = b,$$

则一个初等的演算得出等式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = fg\Big|_a^b - \sum_{i=1}^{n+1} g(x_{i-1})\Delta f(\xi_i), \tag{5}$$

其中 $\Delta f(\xi_i) = f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})$.显然 $\max_i(x_i - x_{i-1}) \to 0 \Leftrightarrow \max_i(\xi_i - \xi_{i-1}) \to 0$(可能出现 $\xi_i = \xi_{i-1}$，此时(5)右端和式出现一些零项).若 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 或 $\int_a^b g\mathrm{d}f$ 存在，则(5)两边同时取极限即得出(4).

由于有公式(4)可用，有关 RS 积分的结论都是"成对"的：每个关于 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 的命题建立之后，交换 f 与 g 的地位，就得出一个对偶的命题.下面就是一个例子.

5.5.2 定理　设 $f \in C[a,b]$，$g \in BV[a,b]$ 或 $f \in BV[a,b]$，$g \in C[a,b]$，则积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 与 $\int_a^b g\mathrm{d}f$ 均存在.

证　只需对 $f \in C[a,b]$，$g \in BV[a,b]$ 证 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在.由5.2.4，又不妨设 g 是增函数.类似于 R 积分，可指明 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在的充要条件是

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_i \omega_i \Delta g(x_i) = 0, \tag{6}$$

其中 λ，x_i，$\Delta g(x_i)$ 依 5.5.1，而 ω_i 是 f 在 $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，即

$$\omega_i = \sup_{x,y \in J_i} |f(x) - f(y)|.$$

因

$$\sum_i \omega_i \Delta g(x_i) \leqslant \max_i \omega_i \sum_i \Delta g(x_i)$$
$$\leqslant \max_i \omega_i V_a^b(g),$$

而由 f 在 $[a,b]$ 上一致连续推出 $\max\limits_i \omega_i \to 0(\lambda \to 0)$，故条件(6)满足. 因此积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在. □

由于 RS 积分的构造类似于 R 积分，将 R 积分的一些性质(参考§3.1 中所述的性质($\mathbf{R}_1$)~($\mathbf{R}_4$))推广于 RS 积分是很自然的. 以下命题综合了基本的结论.

5.5.3 命题 RS 积分有以下性质：

(i) 双线性性：积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 分别对 f 与 g 是线性的，即

$$\int_a^b (\alpha f + \beta\varphi)\mathrm{d}g = \alpha\int_a^b f\mathrm{d}g + \beta\int_a^b \varphi\,\mathrm{d}g;$$
$$\int_a^b f\mathrm{d}(\alpha g + \beta h) = \alpha\int_a^b f\mathrm{d}g + \beta\int_a^b f\mathrm{d}h,$$

其中 $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$，假定等式右端的积分都存在.

(ii) 可加性：设 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在，$a < c < b$，则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_a^c f\mathrm{d}g + \int_c^b f\mathrm{d}g. \tag{7}$$

(iii) 若 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在，则

$$\left|\int_a^b f\mathrm{d}g\right| \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| V_a^b(g). \tag{8}$$

(iv) 积分与极限互换：若 $f_n \in C[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$，$g \in \mathrm{BV}[a,b]$，$f_n \rightrightarrows f$，则

$$\lim_n \int_a^b f_n\mathrm{d}g = \int_a^b f\mathrm{d}g.$$

证明是直接的，留给读者作为练习.

对于 5.5.3 中的“可加性”，可能容易忽略与 R 积分的一个差

别：即使 $\int_a^c f\mathrm{d}g$ 与 $\int_c^b f\mathrm{d}g$ 都存在，$\int_a^b f\mathrm{d}g$ 亦可能不存在. 这种似乎难以置信的现象出现在函数 f,g 极简单的场合.

例 1 设 $f=\chi_{(0,1]},g=\chi_{[0,1]}$. 直接看出

$$\int_{-1}^0 f\mathrm{d}g = 0 = \int_0^1 f\mathrm{d}g.$$

今指明 $\int_{-1}^1 f\mathrm{d}g$ 不存在. 取 $[-1,1]$ 的分划 $P=\{x_i\}$，使 $0\in(x_{k-1},x_k)$，$\xi_i\in J_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则依式(2)有

$$S_P(f,g)=f(\xi_k).$$

因可取 ξ_k 使 $f(\xi_k)=1$，亦可使 $f(\xi_k)=0$，故 $\lim S_P(f,g)$ 不存在，从而积分 $\int_{-1}^1 f\mathrm{d}g$ 不存在.

如此简单的病态例子的出现，不能不唤起我们的警觉：处理 RS 积分需要更多的小心，以免盲目类比于 R 积分而陷入谬误.

在适当条件下，RS 积分可化为 L 积分.

5.5.4 定理 设 $g\in\mathrm{AC}$；f 连续或 $f\in\mathrm{BV}$，则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^b fg'\mathrm{d}m. \tag{9}$$

证 在所给条件下，由 5.5.2 及 5.3.5 知式(9)两端积分均存在. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使当 $f\in C[a,b]$，$x,y\in[a,b]$，$|x-y|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，且当 $e\subset[a,b]$，$me<\delta$ 时 $\int_e|g'|\mathrm{d}m<\varepsilon$. 取 $[a,b]$ 的分划 $\{x_i\}$，使 $\lambda=\max\limits_i\Delta x_i<\delta$，则

$$\begin{aligned}
D &\triangleq \left|\sum_i f(x_i)\Delta g(x_i)-\int_a^b fg'\mathrm{d}m\right| \\
&\leqslant \sum_i\left|f(x_i)\Delta g(x_i)-\int_{J_i}fg'\mathrm{d}m\right| \\
&= \sum_i\left|f(x_i)\int_{J_i}g(x_i)-\int_{J_i}fg'\mathrm{d}m\right| \quad (\text{用 } 5.3.5) \\
&\leqslant \sum_i\int_{J_i}|f(x_i)-f(x)||g'(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

若 f 连续,则

$$D \leqslant \varepsilon \sum_i \int_{J_i} |g'| dm = \varepsilon \| g' \|_1.$$

若 $f \in \mathrm{BV}$,则

$$D \leqslant \sum_i V_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \int_{J_i} |g'| \mathrm{d}m \leqslant \varepsilon V_a^b(f).$$

在这两种情况下都有 $D \to 0(\lambda \to 0)$. 于是

$$\int_a^b f \mathrm{d}g = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(x_i) \Delta g(x_i) = \int_a^b f g' \mathrm{d}m. \qquad \square$$

*§5.6 广义测度

上节所介绍的 RS 积分,实际上是一种更一般的积分的特殊情况,后者建立在所谓广义测度的基础上.

直到现在为止,我们都限定测度非负. 在将测度看作长度、面积与体积的推广这种意义上,这是很自然的. 但从其他角度考虑,就不那么合理了. 例如,只要积分 $\int_X f \mathrm{d}\mu$ 存在,集函数 $A \to \nu A = \int_A f \mathrm{d}\mu$ 就是 σ-可加的,且 $\nu \varnothing = 0$(参看 3.2.6),但 νA 可能取负值. 如能将这样的 ν 也纳入测度论的研究对象之内,则可望得到一个应用范围更广的理论.

以下设 $(X, \mathscr{A})$ 是给定的可测空间(参看 2.2.1). 若 $A_n \in \mathscr{A}$ 是可数个互不相交的集,则约定说 $A = \bigcup A_n$ 是 A 的一个**分解**①

5.6.1 定义 若一函数 $\nu: \mathscr{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ 满足条件:

(i) $\nu \varnothing = 0$;

(ii) 对 $A \in \mathscr{A}$ 的任一分解 $A = \bigcup A_n$ 有

① 这一说法并不很通行,因此仅限于本章的剩下部分使用.

$$\nu A = \sum_n \nu A_n, \tag{1}$$

则称 ν 为 X 或 $\mathscr{A}$ 上的一个广义测度.

除了允许 ν 取负值这一点之外，5.6.1 与测度的定义并无不同. 但正是 ν 可能取负值这一点导致一个更复杂的理论.

条件(ii)有两个极重要的推论，必须马上指出. 首先，ν 不能既取到 ∞，又取到 $-\infty$. 事实上，若 $\nu A = \infty$，$\nu B = -\infty$，则从

$$\nu A = \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) = \infty$$

推出 $\nu(A \cap B) = \infty$ 或 $\nu(A \setminus B) = \infty$；同理有 $\nu(B \cap A) = -\infty$ 或 $\nu(A \setminus B) = -\infty$. 两者综合起来得出 $\nu(A \setminus B) = \infty$，$\nu(B \setminus A) = -\infty$，但这使等式 $\nu(A \Delta B) = \nu(A \setminus B) + \nu(B \setminus A)$ 失去意义. 其次，若式(1)中 νA 有限，则其右端级数收敛且与各项顺序无关，因而级数 $\sum \nu A_n$ 必定绝对收敛.

例 1 设 μ, λ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度，其中至少一个为有限，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$，则 $\alpha\mu + \beta\lambda$ 显然是广义测度.

由此可见，为了能对测度进行线性运算，引进广义测度也是必要的.

测度的一部分性质(参看 2.2.3)可推广于广义测度.

5.6.2 命题 设 ν 是 $\mathscr{A}$ 上的广义测度，则它有以下性质：

(i) 若 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \subset B$，νB 有限，则 νA 亦有限.

(ii) 可减性：若 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \subset B$，νA 有限，则

$$\nu(B \setminus A) = \nu B - \nu A.$$

(iii) 下连续性：设 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ 是一升列，则

$$\nu(\bigcup_n A_n) = \lim_n \nu A_n.$$

(iv) 上连续性：设 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ 是一降列，且 $|\nu A_1| < \infty$，则

$$\nu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \nu A_n.$$

证明类似于 2.2.3(留作练习).

5.6.3 定义 设 ν 是 $\mathscr{A}$ 上的广义测度. 若 $B \in \mathscr{A}$，当 $B \supset A$

$\in \mathscr{A}$ 时有 $\nu A \geqslant 0$（或 $\nu A \leqslant 0$），则称 B 为 ν 的正集（或负集）。若 $X = P \cup N$ 是一分解，其中 P 与 N 分别为 ν 的正集与负集，则称此分解为 ν 的 Hahn 分解.

P 是 ν 的正集实际上相当于：ν 限制在 P 上（即 ν 限制在 $\{A \in \mathscr{A} : A \subset P\}$ 上）是一个测度；N 是 ν 的负集则相当于 $-\nu$ 限制在 N 上是一个测度. $X = P \cup N$ 为 Hahn 分解在某种意义上意味着，P 与 N 分别为"最大的"正集与负集.

例 2 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度，$f \in M(X)$，$\int_X f \mathrm{d}\mu$ 存在. 则由 $\nu A = \int_A f \mathrm{d}\mu (A \in \mathscr{A})$ 定义出一个 $\mathscr{A}$ 上的广义测度 ν（参看 3.2.1）. 令 $P = X(f \geqslant 0)$，$N = P^c$，则 $X = P \cup N$ 显然是 ν 的一个 Hahn 分解. 其次，$X = X(f > 0) \cup X(f \leqslant 0)$ 亦为 ν 的 Hahn 分解. 可见 Hahn 分解未必是唯一的.

以下是关于广义测度的最重要的结果之一.

5.6.4 Hahn 分解定理 设 ν 是 $\mathscr{A}$ 上的广义测度，则 ν 的 Hahn 分解必存在. 若 $X = P_i \cup N_i (i = 1, 2)$ 是 ν 的两个 Hahn 分解，则对任给 $A \in \mathscr{A}$ 有

$$\nu(A \cap P_1) = \nu(A \cap P_2), \ \nu(A \cap N_1) = \nu(A \cap N_2).$$

定理的证明放在最后一节.

Hahn 分解的意义在于，它引出广义测度表为两测度之差的一种标准分解.

5.6.5 定义 设 ν 是 $\mathscr{A}$ 的广义测度，$X = P \cup N$ 是 ν 的一个 Hahn 分解. 任给 $A \in \mathscr{A}$，令

$$\nu^+ A = \nu(A \cap P), \ \nu^- A = -\nu(A \cap N). \tag{2}$$

分别称 ν^+ 与 ν^- 为 ν 的正变差与负变差，而称 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ 为 ν 的全变差.

不难直接验证，ν^+，ν^- 与 $|\nu|$ 都是 $\mathscr{A}$ 上的测度，且 5.6.4 的后半部分表明 ν^+，ν^-（因而 $|\nu|$）的定义与分解 $X = P \cup N$ 的选择无关. 由

式(2)得出，对任给 $A\in\mathscr{A}$ 有

$$\nu A=\nu(A\cap P)+\nu(A\cap N)=\nu^+A-\nu^-A,$$

即

$$\nu=\nu^+-\nu^-,\tag{3}$$

这正是我们所期望的分解，称之为 ν 的 **Jordan 分解**.

若 ν,P,N 依例 2，则对任给 $A\in\mathscr{A}$ 有

$$\nu^+A=\nu(A\cap P)=\int_{A\cap P}f\mathrm{d}\mu=\int_A f^+\mathrm{d}\mu.$$

同理 $\nu^-A=\int_A f^-\mathrm{d}\mu$，因而

$$|\nu|(A)=\nu^+A+\nu^-A=\int_A|f|\mathrm{d}\mu.$$

这样，$\nu^+,\nu^-,|\nu|$ 恰好对应于 $f^+,f^-,|f|$；而 Jordan 分解 (3) 正好对应于分解 $f=f^+-f^-$(参照 §2.3(5)). 这种对应为展开广义测度理论提供了主要的启示，读者务必细加体会.

有时需用到对 $|\nu|$ 的如下等价表示.

5.6.6 定理　设 ν 是 $\mathscr{A}$ 上的广义测度，则以下结论成立：

(i) $|\nu A|\leqslant|\nu|(A)(A\in\mathscr{A})$，$|\nu|$ 是有此性质的最小测度.

(ii) $|\nu|(A)=\sup\left\{\sum|\nu A_n|:A=\bigcup A_n\text{ 是 }A\text{ 的分解}\right\}$，$A\in\mathscr{A}$.

证　取定 $A\in\mathscr{A}$ 与 ν 的 Hahn 分解 $X=P\cup N$.

(i) 显然 $|\nu A|\leqslant|\nu|(A)$. 若 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度且满足 $|\nu B|\leqslant\mu B(\forall B\in\mathscr{A})$，则

$$\begin{aligned}|\nu|(A)&=\nu^+A+\nu^-A=\nu(A\cap P)-\nu(A\cap N)\\&\leqslant\mu(A\cap P)+\mu(A\cap N)=\mu A,\end{aligned}$$

可见 $|\nu|\leqslant\mu$.

(ii) 固定 $A\in\mathscr{A}$，以 β 记要证等式之右端. 因 $A=(A\cap P)\cup(A\cap N)$ 是 A 的一个分解，故

$$|\nu|(A)=|\nu(A\cap P)|+|\nu(A\cap N)|\leqslant\beta.$$

若 $A = \bigcup A_n$ 是 A 的任一分解，则

$$\sum |\nu A_n| \leqslant \sum |\nu|(A_n) = |\nu|(A),$$

这推出 $\beta \leqslant |\nu|(A)$. 因此所证等式成立. □

Jordan 分解 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 的作用在于：某些对测度适用的概念与结论，可能循此分解推广于广义测度. 积分概念的以下推广就是如此.

5.6.7 定义 设 ν 是 $\mathscr{A}$ 上的广义测度，$f \in L^1(|\nu|)$. 称

$$\int_X f \mathrm{d}\nu = \int_X f \mathrm{d}\nu^+ - \int_X f \mathrm{d}\nu^- \tag{4}$$

为 f 在 X 上对广义测度 ν 的积分.

由 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ 不难推出

$$\int_X |f| \mathrm{d}|\nu| = \int_X |f| \mathrm{d}\nu^+ + \int_X |f| \mathrm{d}\nu^- \tag{5}$$

（先对简单函数证明，然后用 Levi 定理过渡到一般情况），因此由 $f \in L^1(|\nu|)$ 推出 $f \in L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$. 故式(4)中的积分存在且有限.

L 积分的许多性质，如线性性、σ-可加性、下连续性与上连续性、控制收敛定理、绝对连续性等，通过定义式(4)可自然地推广于对广义测度的积分，这些概不细述. 读者如能独立写出所有这些推广及其证明，将是一个很好的练习. 此处，我们仅证明很有用的以下不等式：

$$\left| \int_X f \mathrm{d}\nu \right| \leqslant \int_X |f| \mathrm{d}|\nu|, \tag{6}$$

其中 $f \in L^1(|\nu|)$. (6)由(4)及 3.2.5(ii) 推出：

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \mathrm{d}\nu \right| &\leqslant \left| \int_X f \mathrm{d}\nu^+ \right| + \left| \int_X f \mathrm{d}\nu^- \right| \\ &\leqslant \int_X |f| \mathrm{d}\nu^+ + \int_X |f| \mathrm{d}\nu^- \\ &= \int_X |f| \mathrm{d}|\nu|. \qquad (\text{用}(5)). \end{aligned}$$

5.6.8 命题 设 $\nu = \lambda - \mu$，λ, μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度. 则 $\nu^+ \leqslant \lambda$，$\nu^- \leqslant \mu$，$|\nu| \leqslant \lambda + \mu$. 若 $f \in L^1(\lambda + \mu)$，则

$$\int_X f\mathrm{d}\nu = \int_X f\mathrm{d}\lambda - \int_X f\mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

证　设 $X = P\cup N$ 是 ν 的 Hahn 分解，则

$$\begin{aligned}\nu^+ A &= \nu(A\cap P) = \lambda(A\cap P) - \mu(A\cap P)\\ &\leqslant \lambda(A\cap P) \leqslant \lambda(A), \qquad (\forall A\in\mathscr{A})\end{aligned}$$

可见 $\nu^+\leqslant\lambda$. 同理 $\nu^-\leqslant\mu$；从而 $|\nu|\leqslant\lambda+\mu$.

若 $f\in L^1(\lambda+\mu)$，则由 $|\nu|\leqslant\lambda+\mu$ 有

$$\int_X |f|\mathrm{d}|\nu| \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}(\lambda+\mu) < \infty,$$

故 $f\in L^1(|\nu|)$，于是 $\int_X f\mathrm{d}\nu$ 有意义. 式(7) 显然对简单函数 f 成立. $\forall\varepsilon>0$，取简单函数 φ，使（用 4.2.2）

$$\int_X |f-\varphi|\mathrm{d}(\lambda+\mu) < \varepsilon,$$

则

$$\begin{aligned}&\left|\int_X f\mathrm{d}\nu - \left(\int_X f\mathrm{d}\lambda - \int_X f\mathrm{d}\mu\right)\right|\\ \leqslant&\left|\int_X f\mathrm{d}\nu - \int_X \varphi\,\mathrm{d}\nu\right| + \left|\int_X f\mathrm{d}\lambda - \int_X \varphi\,\mathrm{d}\lambda\right|\\ &+\left|\int_X f\mathrm{d}\mu - \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu\right|\\ \leqslant&\int_X |f-\varphi|\mathrm{d}(|\nu|+\lambda+\mu)\\ \leqslant& 2\int_X |f-\varphi|\mathrm{d}(\lambda+\mu) < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明式(7)成立.　□

5.6.8 表明，若在定义 5.6.7 中，将 Jordan 分解 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 代以任何其他分解 $\nu=\lambda-\mu$，λ,μ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度，则依式(7)定义的积分 $\int_X f\mathrm{d}\nu$ 仍然与(4) 一样，因而与 λ,μ 的选择无关，只要 $f\in L^1(\lambda+\mu)$.

*§5.7 Lebesgue-Stieltjes 积分

本节利用广义测度概念将 RS 积分推广为 LS 积分（即 Lebesgue-Stieltjes 积分），其思路颇类似于从 R 积分过渡到 L 积分：对一定的函数 g，构造一广义测度 ν，然后对 $f\in L^1(|\nu|)$ 以 $\int f\mathrm{d}\nu$ 作为 (f,g) 的 LS 积分．关键的步骤是测度 ν 的构成，这要用到 §2.5 中的方法．

首先设 $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一增函数，下面用 §2.5 中定义 Lebesgue 测度 m 的方法类似地构造一测度 μ_φ（实际上，当 $\varphi(x)=x$ 时 $\mu_\varphi=m$）．

1° 定义开集测度．设 $G=\bigcup\delta_k$，$\delta_k=(a_k,b_k)$ 是 G 的构成区间，则规定 G 的测度 $\mu_\varphi G$ 为

$$\mu_\varphi G=\sum[\varphi(b_k^-)-\varphi(a_k^+)].$$

约定当 $a=-\infty$ 时 $\varphi(a^+)=\varphi(-\infty)$，当 $b=\infty$ 时 $\varphi(b^-)=\varphi(\infty)$；令 $\mu_\varphi\varnothing=0$．注意 $\mu_\varphi\mathbf{R}=\varphi(\infty)-\varphi(-\infty)$．如同 §2.5(5)(6)一样可验证

$$G_1\subset G_2\Rightarrow\mu_\varphi G_1\leqslant\mu_\varphi G_2;\tag{1}$$

$$\mu_\varphi(\bigcup G_n)\leqslant\sum\mu_\varphi G_n,\tag{2}$$

其中 $G_n(n=1,2,\cdots)$ 为开集；当 G_n 互不相交时(2)为等式．

2° 定义外测度 μ_φ^*．任给 $A\subset\mathbf{R}$，令

$$\mu_\varphi^*A=\inf\{\mu_\varphi G:\ G\supset A\text{ 为开集}\}.\tag{3}$$

如同 §2.5 中对 m^* 所作的一样，可验证 μ_φ^* 是 $\mathbf{R}$ 上的一个外测度，且对开集 G 有 $\mu_\varphi^*G=\mu_\varphi G$．

3° 定义测度 μ_φ．由 2.5.3，μ_φ^*-可测集之全体构成一 σ-代数 $\mathscr{A}$，即 $B\in\mathscr{A}\Leftrightarrow$ 每个 $A\subset\mathbf{R}$ 满足

$$\mu_\varphi^* A = \mu_\varphi^* (A \cap B) + \mu_\varphi^* (A \backslash B). \tag{4}$$

μ_φ^* 在 $\mathscr{A}_\varphi$ 上的限制是一完备测度，约定记为 μ_φ. 称 μ_φ 为 φ 导出的 **LS 测度**(即 Lebesgue-Stieltjes 测度)，简称为 φ 导出的测度；称 $A \in \mathscr{A}_\varphi$ 为关于 φ 的 LS-可测集. 可以证明(本章习题 36)，$\mathscr{A}_\varphi$ 包含所有开集，因而包含所有 Borel 集.

为使对 μ_φ 有更清晰的印象，可注意以下事实：对任何 $a \in \mathbf{R}$，有

$$\mu_\varphi\{a\} = \lim_n \mu_\varphi(a - n^{-1}, a + n^{-1}) = \varphi(a^+) - \varphi(a^-), \tag{5}$$

即 $\mu_\varphi\{a\}$ 表达了 φ 在点 a 处的跃度，它不必为零，这是 μ_φ 与 m 的重要区别之一. 由此又得出

$$\mu_\varphi[a,b) = \mu_\varphi\{a\} + \mu_\varphi(a,b) = \varphi(b^-) - \varphi(a^-); \tag{6}$$

$$\mu_\varphi[a,b] = \mu_\varphi[a,b) + \mu_\varphi\{b\} = \varphi(b^+) - \varphi(a^-). \tag{7}$$

值得注意的是，若 φ 在 a 间断，则函数值 $\varphi(a)$ 在 μ_φ 的定义中未起任何作用，因而总可以假定 $\varphi(a) = \varphi(a^+)$，即 φ 是右连续的. 其次，若 $\varphi = \psi + \text{const}$，则显然 $\mu_\varphi = \mu_\psi$. 因此，可以假定在某一特定点 a 有 $\varphi(a) = 0$；而当 $\varphi(-\infty)$ 有限时可设 $\varphi(-\infty) = 0$. 若 φ 只是在区间 $[a,b]$ 上给定，则如本章一直所约定的，总设在 $(-\infty,a)$ 上 $\varphi(x) = \varphi(a)$，而在 (b,∞) 上 $\varphi(x) = \varphi(b)$. 在这种情况下有

$$\mu_\varphi(-\infty,a) = 0 = \mu_\varphi(b,\infty),$$

$$\mu_\varphi[a,b] = \varphi(b) - \varphi(a); \tag{8}$$

$$\mu_\varphi A = \mu_\varphi(A \cap [a,b]), A \in \mathscr{A}_\varphi. \tag{9}$$

例 1　设 $\varphi = \chi_{[0,\infty)}$，则不难直接验证

$$\mu_\varphi^* A = \chi_A(0), A \subset \mathbf{R}.$$

由此可推出：$\mathscr{A}_\varphi = 2^{\mathbf{R}}$，且 μ_φ 就是点 0 处的 Dirac 测度(§2.2 例 3). 此例表明，$\mathscr{A}_\varphi$ 可以大于 Lebesgue 可测集类 $\mathscr{L}$.

例 2　设 p 是 X 上的概率测度，f 是 X 上的随机变量，F 是 f 的分布函数，即 $F(x) = pX(f \leqslant x)$，则 F 是 $\mathbf{R}$ 上右连续的增函数，$F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$. 于是 F 导出一个 LS 测度 μ_F，它是 $\mathbf{R}$ 上的一个概率测度. 对每个 $A \in \mathscr{A}_F$，可以证明

$$\mu_F A = pX(f \in A), \tag{10}$$

即 $\mu_F A$ 是 f 取值于 A 中的概率.

现在考虑有界变差函数导出的测度. 给定 $g \in \mathrm{BV}[a,b]$. 因有分解 $g = \varphi - \psi$, φ 与 ψ 是增函数,故自然希望以 $\mu_\varphi - \mu_\psi$ 作为 g 导出的广义测度. 这一定义的缺点是它与分解 $\varphi - \psi$ 的选择有关. 因此采用 g 的标准分解(见 5.2.6):

$$g(x) = g(a) + p(x) - n(x), \tag{11}$$

其中 p, n 分别为 g 的正变差与负变差. 令 $\nu_g = \mu_p - \mu_n$, 则 ν_g 是定义于 σ-代数 $\mathscr{A}_g = \mathscr{A}_p \cap \mathscr{A}_n$ 上的有限广义测度,称它为 g 导出的广义测度. 利用式(11)及 $\nu_g = \mu_p - \mu_n$, 可将公式(5)~(9)推广到 ν_g. 例如,

$$\nu_g\{\alpha\} = g(\alpha^+) - g(\alpha^-);$$
$$\nu_g(\alpha,\beta) = g(\beta^-) - g(\alpha^+).$$

以下是较深入的结论.

5.7.1 定理 设 $g \in \mathrm{BV}[a,b]$, p, n 分别为 g 的正变差与负变差, $\pi = p + n$(§5.2(10)). 则 $\mathscr{A}_g = \mathscr{A}_\pi$, 在 $\mathscr{A}_\pi$ 上

$$\mu_\pi = \mu_p + \mu_n \geqslant |\nu_g|; \nu_g^+ \leqslant \mu_p, \nu_g^- \leqslant \mu_n.$$

证 利用等式 $\pi = p + n$, 依次考虑开区间、开集及任意的 $A \subset \mathbf{R}$, 易得出

$$\mu_\pi^* A = \mu_p^* A + \mu_n^* A. \tag{12}$$

任给 $A, B \subset \mathbf{R}$, 有

$$\begin{aligned} &\mu_\pi^*(A \cap B) + \mu_\pi^*(A \backslash B) \\ &= [\mu_p^*(A \cap B) + \mu_p^*(A \backslash B)] \\ &\quad + [\mu_n^*(A \cap B) + \mu_n^*(A \backslash B)] \\ &\geqslant \mu_p^* A + \mu_n^* A = \mu_\pi^* A. \end{aligned}$$

可见, $B \in \mathscr{A}_\pi$ 当且仅当对任何 $A \subset \mathbf{R}$ 同时有

$$\mu_p^* A = \mu_p^*(A \cap B) + \mu_p^*(A \backslash B),$$
$$\mu_n^* A = \mu_n^*(A \cap B) + \mu_n^*(A \backslash B).$$

故得 $\mathscr{A}_\pi = \mathscr{A}_p \cap \mathscr{A}_n = \mathscr{A}_g$. 由(12)推出在 $\mathscr{A}_\pi$ 上有 $\mu_\pi = \mu_p + \mu_n$. 余

下的结论由 5.6.8 得出. □

5.7.2 定义 设 $g\in \mathrm{BV}[a,b]$, ν_g, μ_π 依 5.7.1. 任给 $f\in L^1(\mu_\pi)$, 令

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_{\mathbf{R}} f\mathrm{d}\nu_g. \tag{13}$$

称它为 f 关于 g 的 Lebesgue-Stieltjes 积分,简称为 LS 积分.

因 $\mathscr{A}_\pi = \mathscr{A}_g$,故当 $f\in L^1(\mu_\pi)$时 f 关于 $|\nu_g|$ 可测,且由 $|\nu_g|\leqslant \mu_\pi$ 知 $f\in L^1(|\nu_g|)$. 于是依 5.6.7 知式(13)右端有意义. 又由 5.6.8, (13)可写成

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_a^b f\mathrm{d}\mu_p - \int_a^b f\mathrm{d}\mu_n. \tag{14}$$

因(14)右端是对通常测度的积分,故可将第三章中的有关结果转移到 LS 积分.

1° 线性性:设 $f,h\in L^1(\mu_\pi)$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,则

$$\int_a^b(\alpha f+\beta h)\mathrm{d}g = \alpha\int_a^b f\mathrm{d}g + \beta\int_a^b h\mathrm{d}g.$$

2° 可加性:设 $f\in L^1(\mu_\pi)$, $a<c<b$, g 在 $x=c$ 连续,则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_a^c f\mathrm{d}g + \int_c^b f\mathrm{d}g, \tag{15}$$

此处 $\int_a^c f\mathrm{d}g = \int_{[a,c]} f\mathrm{d}\nu_g$, $\int_c^b f\mathrm{d}g$ 仿此. 因在所述条件下 $\pi(x)$ 亦必在 $x=c$ 连续(参看本章习题 7),于是

$$\mu_\pi\{c\} = \mu_p\{c\} = \mu_n\{c\} = 0;$$

$$\int_a^b f\mathrm{d}\mu_p = \int_a^c f\mathrm{d}\mu_p + \int_c^b f\mathrm{d}\mu_p.$$

对 $\int_a^b f\mathrm{d}\mu_n$ 亦有同样结果,于是式(15)成立.

若约定

$$\int_a^{c-} f\mathrm{d}g = \int_{[a,c)} f\mathrm{d}g,$$

则在一般情况下(15)应代之以

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = \int_a^{c-} f\mathrm{d}g + \int_c^b f\mathrm{d}g.$$

3° 若 $f \in L^1(\mu_\pi)$ 满足 $|f| \leqslant \beta$，则

$$\left|\int_a^b f\mathrm{d}g\right| \leqslant \beta V_a^b(g).$$

事实上，由上节式(5)有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\mathrm{d}g\right| &\leqslant \int_a^b |f|\mathrm{d}|\nu_g| \leqslant \beta\int_a^b \mathrm{d}\mu_\pi \\ &= \beta\mu_\pi[a,b] = \beta[\pi(b) - \pi(a)] \\ &= \beta V_a^b(g).\end{aligned}$$

关于 LS 积分与 RS 积分的关系，有类似于 3.4.1 的以下结果.

5.7.3 定理 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界实函数，g 是 $[a,b]$ 上右连续的增函数，则 RS 积分 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在当且仅当 f 在$[a,b]$上 μ_g-几乎处处连续，特别 f 在 g 的间断点处应连续. 若 RS 积分$\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在，则它与相应的 LS 积分相等.

证明类似于 3.4.1，请读者自证.

5.7.3 特别解释了 §5.5 例 1，在该例中 f 恰在 g 的间断点处间断. 由 5.7.3 也推出，若 $g \in \mathrm{BV}$ 右连续，f 在 $[a,b]$ 上有界、至多可数个间断点且与 g 没有公共间断点，则 f 关于 g 在 $[a,b]$ 上的 RS 积分与 LS 积分相等.

△§5.8 某些基本结论的证明

5.1.3 之证 取有限开区间 $\Delta \supset E$，不妨设$\forall\, d \in D$：$d \subset \Delta$.

1° 归纳地选出所需的$\{d_k\} \subset D$. 令 $\beta_0 = \sup\limits_{d \in D} md$. 取 $d_1 \in D$，使 $md_1 > \beta_0/2$. 若 $E \subset d_1$，则证明已完. 否则，必有 $d \in D$，使 $d \subset G_1 = \Delta \backslash d_1$，于是 $\beta_1 = \sup\limits_{G_1 \supset d \in D} md > 0$. 取 $d_2 \in D$，使 $d_2 \subset G_1$，$md_2 > \beta_1/2$. 必定 $d_1 \cap d_2 = \varnothing$. 设已选出互不相交的 $d_i \in D(i = 1,2,\cdots,n)$，令

$F_n = \bigcup_{i=1}^n d_i$. 若 $E \subset F_n$，则定理证完. 否则，有 $d \in D$，使 $d \subset G_n = \Delta \backslash F_n$，于是 $\beta_n = \sup_{G_n \supset d \in D} md > 0$. 取 $d_{n+1} \in D$，使 $d_{n+1} \subset G_n$，$md_{n+1} > \beta_n/2$. 如此得到一列互不相交的区间 $\{d_k\} \subset D$，不妨设它是一无限序列.

2°　验证 $m(E \backslash \bigcup d_k) = 0$. 将每个 d_k 扩大为闭区间 d_k^*，使 d_k^* 与 d_k 共中点而 $md_k^* = 5md_k (k=1,2,\cdots)$. 因

$$\sum_k md_k = m(\bigcup_k d_k) \leqslant m\Delta < \infty,$$

故只需证

$$E \backslash \bigcup_k d_k \subset \bigcup_{i \geqslant n} d_i^* (\forall\, n \in \mathbf{N}). \tag{1}$$

取定 $x \in E \backslash \bigcup d_k$ 与 $n \in \mathbf{N}$. 必定 $x \in \Delta \backslash F_n = G_n$，故有 $d \in D$，使 $x \in d \subset G_n$. 由 $\beta_k < 2md_{k+1}$ 知 $\beta_k \to 0 (k \to \infty)$. 因此当 k 充分大时 $d \not\subset G_k$（否则 $md \leqslant \beta_k \to 0$!）. 取最小的 $k \in \mathbf{N}$，使 $d \not\subset G_k$. 这推出 $d \cap F_k \neq \varnothing$，$d \cap F_{k-1} = \varnothing$. 因此 $d \cap d_k \neq \varnothing$，$d \subset G_{k-1}$. 于是 $md \leqslant \beta_{k-1} < 2md_k$，这与 $md_k^* = 5md_k$，$d \cap d_k \neq \varnothing$ 一起推出 $x \in d_k^*$. 因 $d \subset G_n$，必 $k > n$，故(1)得证. □

5.6.4 之证　不妨设 $-\infty \leqslant \nu < \infty$.

1°　确定 ν 的一个正集 P. 因预期 $X = P \cup P^c$ 将为 Hahn 分解，P 应有某种"极大性"，于是令

$$\beta = \sup\{\nu A : A \text{ 为 } \nu \text{ 的正集}\}. \tag{2}$$

取 ν 的一列正集 $\{A_k\}$，使 $\nu A_k \to \beta (k \to \infty)$. 令 $P_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$，$P = \bigcup P_n$. $\forall\, A \in \mathscr{A}$，有

$$\begin{aligned} \nu(A \cap P_{n+1}) &= \nu(A \cap P_n) + \nu(A_{n+1} \cap (A \backslash P_n)) \\ &\geqslant \nu(A \cap P_n),\ n = 1,2,\cdots. \end{aligned}$$

由此看出 $P_n (n = 1,2,\cdots)$ 均为 ν 的正集. 由 5.6.2(iii)，

$$\nu(A \cap P) = \lim_n \nu(A \cap P_n) \geqslant 0\ (\forall\, A \in \mathscr{A}),$$

可见 P 是 ν 的正集. 显然 $\nu P = \beta$.

2°　证 $N = P^c$ 是 ν 的负集（从而 $X = P \cup N$ 是 ν 的 Hahn 分

解). 若不然,则有 $E\subset N$,使 $0<\nu E<\infty$. 因 E 不是 ν 的正集(否则 $P\cup E$ 是正集,$\nu(P\cup E)>\beta$,与式(2)矛盾),故有 $A\in\mathscr{A}$,使 $\nu(E\cap A)<0$. 这表明存在最小的自然数 n_1,使得有 $A_1\subset E$,满足 $\nu A_1<-2^{-n_1}$. 因

$$\nu(E\backslash A_1)=\nu E-\nu A_1>0,$$

$E\backslash A_1$ 如同 E 一样不能是 ν 的正集,故以 $E\backslash A_1$ 代 E 重复前面的论证得出最小的 $n_2\in\mathbf{N}$,使得有 $A_2\subset E\backslash A_1$,$\nu A_2<-2^{-n_2}$. 如此继续,对每个 $k\in\mathbf{N}$,得到最小的 $n_k\in\mathbf{N}$,使得有

$$A_k\subset E\backslash\bigcup_{i<k}A_i,\ \nu A_k<-2^{-n_k}. \tag{3}$$

令 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$,则

$$\nu(E\backslash A)=\nu E-\nu A=\nu E-\sum_k\nu A_k$$

$$>\nu E+\sum_k 2^{-n_k}>0.$$

因 νE 与 $\nu(E\backslash A)$有限,故 $\sum 2^{-n_k}<\infty$. 因 $E\backslash A$ 不是 ν 的正集,故有 $B\subset E\backslash A$: $\nu B<0$. 取 $k\in\mathbf{N}$,使 $n_k>2$ 且 $\nu B<-2^{-n_k}$. 于是

$$B\cup A_k\subset E\backslash\bigcup_{i<k}A_i;$$

$$\nu(B\cup A_k)<-2^{-n_k}-2^{-n_k}=-2^{-(n_k-1)},$$

这与 n_k 的最小性矛盾.

3° 证定理的后半部分. 设 $X=P_i\cup N_i(i=1,2)$是 ν 的两个 Hahn 分解. 任给 $A\in\mathscr{A}$,有

$$\nu(A\cap P_1\cap N_2)=\nu(A\cap P_2\cap N_1)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}\nu(A\cap P_1)&=\nu(A\cap P_1\cap P_2)+\nu(A\cap P_1\cap N_2)\\&=\nu(A\cap P_2\cap P_1)+\nu(A\cap P_2\cap N_1)\\&=\nu(A\cap P_2).\end{aligned}$$

同理 $\nu(A\cap N_1)=\nu(A\cap P_2)$. □

评　注

1.　与概念上得到全面更新的积分论比较，实变函数论中的微分论似乎较为平淡. 它依然主要使用老的导数概念；没有迹象表明，用新的积分整个地取代 R 积分这样的事情，会在微分学领域重演. 微分与积分本质上是不同的，前者处理局部问题，概念相对地较简单，自然理论也较单纯. 如果说，在提出新概念方面微分学不如积分学那样活跃，那么对特定函数类的微分性质的研究，则是高度富有挑战性的问题，且通常需要极精细的方法，往往是实变函数论中困难而深奥的问题之一. 测度论方法的引入对微分论的研究给予了最大的推动. 本章的许多结果，如单调函数与有界变差函数的微分性质，正是属于 Lebesgue 的. 因此微分理论的进展，主要被看成是 Lebesgue 理论的胜利.

2.　关于 L 积分的 Newton-Leibniz 公式的建立，无疑是 Lebesgue 理论强大威力的辉煌例证. 然而，现在看来，这个结果并不是很理想的. 主要问题是，L 积分不足以完全起微分逆运算的作用. 当 f' 存在时，不能保证 $f'\in L^1$；即使 $f'\in L^1$，Newton-Leibniz 公式也未必成立. Cohn 在 1980 年证明了：若 f 处处可微且 $f'\in L^1$，则 Newton-Leibniz 公式成立. 这是在 Lebesgue 积分的框架内所能得到的最精采的结果. 然而它仍然不能令人满意：即使 f 处处可微，也未必有 $f'\in L^1$. 就使微分与积分完全互逆这一点而言，L 积分也是不太够用的，人们不得不寻求新的积分，这样的积分被 Denjoy，Perron 等人得到.

3.　Stieltjes 积分是 R 积分朝各个方向推广的热潮中，所出现的较特殊的种类. 今天所称的 Riemann-Stieltjes 积分，最初是 Stieltjes (1856-1894) 在 1894 年发表的《连分数的研究》一文中引进的.

Stieltjes 的思想非常富有启发性，他考虑了积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\varphi(x)$，将 $\varphi(x)$ 解释为沿直线的分布函数. 这一思想在物理学及概率论中得到有效的应用.

4. 对于已习惯于处理"好函数"(例如处处连续或至多除去个别例外点处处可微的函数)的读者来说，§5.1 中的例 1～例 3 似乎是病态的. 实际上，这些只不过是实变函数论早期出现的大量"反例"中最简单的几个罢了. 这些反例对于纠正直觉的误导起了重大作用. 人们曾经想当然地认为：连续函数"一般"是可微的；可微函数的导数"一般"是可积的；连续函数"一般"是有界变差函数，等等. 人们所持的主要理由是：相反的结论在直观上太难以想象. 反例的出现开始改变原有的看法. 但反例并不能解决"一般性"的问题. Weierstrass 在 1972 年首次给出了"处处不可微的连续函数"的例子，数学界深感震惊，正是因为人们的直觉尚未精细到接受这一事实. 即使有了这样的反例，而且随后又出现了更多的反例，人们依然认为这些都是"病态的". 直到泛函分析诞生之后，人们用"纲推理"的方法证明了：处处不可微的连续函数实际上是通例而非特例，对于可微性与连续性的差异之大，人们才达到一个深入的认识. 从理论上讲，寻求反例的进一步努力似乎已失去意义. 但是，从认识的角度看，反例所能提供的直观印象依然是不可替代的.

5. 如果说，L 积分论还只是一般地接受"坏函数"，那么，微分论中实际地接触到一系列"坏函数"，并力图对其进行精确分析. 例如，在 §§5.1 ～ 5.4 中处理了在一零测集上不可微的函数. 这就使实变函数论给人们以专门研究"坏函数"的印象，以致使其早期开创者曾一度备受奚落. Lebesgue 就曾不无伤感地说："对许多数学家来说，我成了没有导数的函数的人，…，只要当我试图加入一个数学讨论时，总会有些分析学者说：这不会使你感兴趣的，我们是在讨论有导数的函数". 即使在今天，人们仍然会认为，以连续可微函数作为出发点是方便而且适当的. 这在很多情况下确实可行. 但问题在于，即

使你的研究对象是很好的函数，甚至是解析函数，你如何能保证研究过程中不出现“坏函数”呢？如果出现这种情况，Lebesgue 的理论正是用来对付的工具. 不理解这一点，就不懂得实变函数论方法的精髓.

习 题 A

1. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是增函数，它们在某个稠子集 $A\subset[a,b]$ 上相等，则 f 与 g 有相同的连续点与可微点.

2. 设 $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $A\subset\mathbf{R}$ 与 $f(A)$ 有界，$\forall\ x\in A$: $|f'(x)|\leqslant\beta$，则

$$m^*f(A)\leqslant\beta m^*A.$$

3. 设 $\mathbf{Q}=\{r_n\}$, $a_n>0$, $\sum a_n<\infty$, $f(x)=\sum\limits_{r_n<x}a_n$. 则 $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 严格增加，且以 $\mathbf{Q}$ 为其间断点集.

4. 设 $\sup\limits_{a<c<b}V_c^b(f)<\infty$，则 $f\in\mathrm{BV}[a,b]$.

5. 设 $\sup\limits_n V_a^b(f_n)<\infty$, $f_n\to f$, $|f|<\infty$，则 $f\in\mathrm{BV}$.

6. 设 $\mathbf{R}^3$ 中的曲线 L 由方程 $x_i=\varphi_i(t)(a\leqslant t\leqslant b, i=1,2,3)$ 给定，给出 L 可度的适当定义，并用 φ_i 刻画其可度性.

7. 设 $f\in\mathrm{BV}[a,b]$，则 $f(x)$ 与 $V_a^x(f)$ 有同样的连续点.

8. 设 $f\in\mathrm{BV}[a,b]$，则 $\int_a^b|f'|\mathrm{d}m\leqslant V_a^b(f)$.

9. 设 $f\in\mathrm{Lip}$, $g\in\mathrm{AC}$，则 $f\circ g\in\mathrm{AC}$.

10. 设 $f\in\mathrm{AC}$, $p\geqslant 1$，则 $|f|^p\in\mathrm{AC}$.

11. 设 $f,g\in\mathrm{AC}$, g 严格增加，则 $f\circ g\in\mathrm{AC}$.

12. 设 $f\in C[a,b]$，至多除去有限个点外 $f'(x)$ 存在且 f' 在 $[a,b]$ 上 R 可积，则 $f\in\mathrm{AC}$.

13. 设 $f\in L^1[a,b]$, $\forall\ c\in(a,b)$: $\int_a^c f\mathrm{d}m=0$，则 $f=0$, a.e. .

14. 设 $\forall\ c\in(a,b)$: $f\in\mathrm{AC}\ [a,c]$ ，f 在 b 连续，则 $f\in\mathrm{AC}\ [a,b]$.

15. 设 $\alpha,\beta>0$, $f(x)=x^\alpha\sin x^{-\beta}(0<x\leqslant 1)$, $f(0)=0$. 讨论 f 在 $[0,1]$ 上的有界变差性与绝对连续性.

16. 设 $f_n\in\mathrm{AC}[a,b](n=1,2,\cdots)$, $\sum\int_a^b|f_n|\mathrm{d}m<\infty$, $\sum f_n(x)$ 在某

点 $c \in [a,b]$ 收敛，则 $f = \sum f_n \in \mathrm{AC}$ 且 $f' = \sum f_n'$, a.e..

17. 设 $f_n \in \mathrm{AC}$, $|f_n| \leqslant g \in L^1 (n = 1,2,\cdots)$, $f_n \to f$, $f_n' \to \varphi$, a.e., 则 $f' = \varphi$, a.e..

18. 设 $f \in \mathrm{AC}$, $f' \geqslant 0$, a.e., 则 f 单调增.

19. 设 f 单调增，$\int_a^b f' \mathrm{d}m = f(b) - f(a)$，则 $f \in \mathrm{AC}[a,b]$.

20. 设 f 单调增，则 $f = g + h$, g, h 单调增，$g \in \mathrm{AC}$, $h' = 0$, a.e..

21. 设 $f_n \in \mathrm{AC} (n = 1,2,\cdots)$ 单调增，$f = \sum f_n$, $|f| < \infty$，则 $f \in \mathrm{AC}$.

22. 设 $f \in C[a,b]$. 若有 $\alpha \in (0,1)$，使 $f(\alpha x + \alpha' y) \leqslant \alpha f(x) + \alpha' f(y)$ $(x, y \in [a,b], \alpha' = 1 - \alpha)$，则 f 是 $[a,b]$ 上的凸函数.

23. 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是凸函数，则 $\exists\, a, b \in \mathbf{R}, \forall\, x \in \mathbf{R}: f(x) \geqslant ax + b$.

24. 设 $f \in C[a,b]$，则 f 是凸函数 $\Leftrightarrow$ $f \in \mathrm{AC}$ 且 f' 在其有定义的点集上单调增.

25. 设 f, g 同时在 $c \in (a,b)$ 间断，且 c 是 g 的不可去间断点，则 RS 积分 $\int_a^b f \mathrm{d}g$ 不存在.

26. 设 $f \in C[a,b]$, g 是增函数，则 $\exists\, c \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f \mathrm{d}g = f(c)[g(b) - g(a)].$$

27. 设 $f \in C[a,b]$, $g \in \mathrm{BV}$, $F(x) = \int_a^x f \mathrm{d}g$，则 $F \in \mathrm{BV}$，且 F 在 g 的连续点连续.

28. 设 $f, g \in \mathrm{AC}$，则 $\int_a^b f g' \mathrm{d}m = fg \Big|_a^b - \int_a^b f' g \mathrm{d}m$.

29. 设 $f_n \in C[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$, $g \in \mathrm{BV}$，则 $\int_a^b f_n \mathrm{d}g \to \int_a^b f \mathrm{d}g$.

30. 设 $f \in C[a,b]$, $g_n \to g$, $|g| < \infty$, $\sup\limits_n V_a^b(g_n) < \infty$，则

$$\int_a^b f \mathrm{d}g_n \to \int_a^b f \mathrm{d}g.$$

31. 设 ν 是 $\mathscr{A}$ 上的有限广义测度，$A_n \in \mathscr{A}$, $A = \lim\limits_n A_n$，则

$$\nu A = \lim_n \nu A_n.$$

32. 设 ν 为广义测度，则 $-\nu^- \leqslant \nu \leqslant \nu^+$.

33. 设 ν 为广义测度，则 $\nu^+ A = \sup\limits_{B \subset A} \nu B$.

34. 证明 5.6.2.

35. 设 $f, g \in M^+(X)$，$\nu A = \int_A f \mathrm{d}\mu$，则对 $g \in L^1(\nu)$ 有 $\int_X g \mathrm{d}\nu = \int_X fg \mathrm{d}\mu$.

36. 设 $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是增函数，则任何开集 $G \subset \mathbf{R}$ 是 μ_φ 可测集.

37. 设 φ, ψ 在 $\mathbf{R}$ 上可微，$0 \leqslant \varphi' \leqslant \psi'$，$\mu_\psi A = 0$，则 $\mu_\varphi A = 0$.

38. 设 $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是增函数，对任何 Borel 集 $A \subset \mathbf{R}$，$x \in \mathbf{R}$，有 $\mu_\varphi(A + x) = \mu_\varphi A$，则有常数 $c \geqslant 0$，使 $\mu_\varphi A = cmA$.

39. 设 $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 单调增且右连续，则 $\mu_\varphi = cm \Leftrightarrow \varphi(x) = cx + \text{const}$.

40. 设 $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ 有界，$\forall\, a \in \mathbf{R}$：$\{x: f(x) > a\}$ 为 Borel 集，$g \in \mathrm{BV}$，则 LS 积分 $\int_a^b f \mathrm{d}g$ 存在.

习 题 B

41. $\mathbf{R}$ 上的单调函数之全体基数为 c.

42. 设 $f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是增函数，$f = \sum f_n$，$|f| < \infty$，则 $f' = \sum f_n'$，a.e..

43. 设 f 是增函数，$f = \varphi + s$，s 是 f 的跳跃函数，则 $f' = \varphi'$，a.e..

44. 设 f 是有限实函数，则 f 的第一类间断点至多可数个.

45. 作 $[0,1]$ 上严格增的连续函数，使 $f' = 0$，a.e..

46. 设 $f \in C[a,b]$，则 $f \in \mathrm{BV} \Leftrightarrow |f| \in \mathrm{BV}$.

47. 设 $f \in C[a,b]$，则 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum |\Delta f(x_i)| = V_a^b(f)$，其中 $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$.

48. 设 $f \in \mathrm{BV}[a,b]$，则 $(V_a^x(f))' = |f'(x)|$，a.e..

49. 作 $f, g \in \mathrm{AC}$，使 $f \circ g \overline{\in} \mathrm{AC}$.

50. 设 $f \in \mathrm{AC}[a,b]$，则 $V_a^x(f) = \int_a^x |f'| \mathrm{d}m \ (a \leqslant x \leqslant b)$.

51. 设 $\pi(x) = V_a^x(f)$，则 $f \in \mathrm{AC} \Leftrightarrow \pi \in \mathrm{AC}$；当 $f \in \mathrm{AC}$ 时 $p, n \in \mathrm{AC}$，p, n 分别为 f 的正变差与负变差.

52. $f \in \mathrm{Lip}[a,b] \Leftrightarrow \exists\, g \in L^\infty[a,b]$：$f(x) = f(a) + \int_a^x g \mathrm{d}m \ (a \leqslant x \leqslant b)$.

53. 设 $f(x) = \int_a^x g \mathrm{d}m$，$g \in L^\infty[a,b]$，则

$$\|g\|_\infty = \inf\{L: |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| (\forall\, x, y \in [a,b])\}.$$

54. $f\in \mathrm{Lip}[a,b]\Leftrightarrow \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\varlimsup\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right|<\infty$.

55. 设 $A\subset \mathbf{R}$，$mA>0$，则 $\forall\ \alpha<1$，存在开区间 $\Delta\subset\mathbf{R}$ 使 $m(A\cap\Delta)>\alpha\, m\Delta$.

56. 设 $f:\ (a,b)\to\mathbf{R}$ 可微，$\forall\ x,y\in(a,b)$，有 $f'(x)(y-x)\leqslant f(y)-f(x)$，则 f 是凸函数.

57. 设 $f:\ (a,b)\to\mathbf{R}$ 是凸函数，$x_0\in(a,b)$，$f'(x_0)=0$，则 $f(x_0)$ 是 f 的最小值；当 f 严格凸时 x_0 是 f 的唯一极小值点.

58. 设 $G\subset\mathbf{R}^n$ 是一凸区域，$f:\ G\to\mathbf{R}$. 给出 f 为凸函数的定义，指明当 f 凸时它必连续.

59. 设 $\int_a^b f\mathrm{d}g$ 存在，$\varphi:\ [\alpha,\beta]\to[a,b]$ 是一严格增加的双射，则

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{d}g(\varphi(t))=\int_a^b f\mathrm{d}g.$$

60. 设 ν 是 $\mathscr{A}$ 上的有限广义测度，则 $\sup\limits_{A\in\mathscr{A}}|\nu A|<\infty$.

参 考 书 目

1 程其襄等.实变函数论与泛函分析基础.北京:高等教育出版社,1983

2 Cohn,D.L. Measure Theory. Boston:Birkhäuser,1980

3 Folland,G.B. Real Analysis,Modern Techniques and Their Applications. New York:John Wiley&Sons,1984

4 郭大钧等.实变函数与泛函分析.济南:山东大学出版社,1986

5 国防科技大学应用数学教研室.实变函数论习题解答.长沙:湖南科学技术出版社,1980

6 Halmos,P.R. 测度论.王建华译.科学出版社,1958

7 Натансон,И.П. 实变函数论.徐瑞云译.高等教育出版社,1958

8 Hewitt,E.,Stromberg,K.R. 实分析与抽象分析.孙广润译.天津大学出版社,1994

9 胡钦训.实变函数论基础.北京:国防工业出版社,1984

10 胡适耕.现代分析引论.武汉:华中理工大学出版社,1989

11 Kline,M. 古今数学思想,第4册.北京大学数学系数学史翻译组译.上海科学技术出版社,1981

12 Royden,H.L. Real Analysis. New York:Macmillan Company,1966

13 Rudin,W. Real and Complex Analysis. New York:McGraw-Hill,1974

14 夏道行等.实变函数论与泛函分析,第一册(第二版).北京:高等教育出版社,1987

15 郑维行,王声望.实变函数与泛函数分析概要(第二版).北京:高等教育出版社,1989

16 周民强.实变函数.北京:北京大学出版社,1985

习题答案与提示

第一章

2. $A \subset C$.

4. 运算"Δ"满足结合律.

6. 注意$\{A_n \cap B_n\}$亦是升列且$(\bigcup\limits_n A_n) \cap (\bigcup\limits_n B_n) = \bigcup\limits_{m,n}(A_m \cap B_n)$.

7. 用对偶律.

8. 只需证 $A = \overline{\lim\limits_n} A_n \Leftrightarrow \chi_A = \overline{\lim\limits_n} \chi_{A_n}$, $A = \underline{\lim\limits_n} A_n \Leftrightarrow \chi_A = \underline{\lim\limits_n} \chi_{A_n}$.

9. $\overline{\lim\limits_n} A_n = A \cup B$, $\underline{\lim\limits_n} A_n = A \cap B$.

10. $X(f_n \to \infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \underline{\lim\limits_n} A_{mn}$.

14. 如令 $f(0) = 1/2$, $f(1/n) = 1/(n+2)$, $f(x) = x(x \neq 0, 1, , 1/2, \cdots, 1/n, \cdots)$.

15. 如令 $f(0) = 0$, $f(1/n) = -\cot(\pi/(n+2))$, $f(x) = -\cot \pi x(x \neq 0, 1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots)$.

16. 取无限可数集 $A \subset \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$, 定义 $f(x) = x(\forall x \in \mathbf{R} \backslash (A \cup \mathbf{Q}))$, 且使 $f: A \cup \mathbf{Q} \to A$ 为双射.

17. 利用 1.3.2.

18. 利用 $\mathbf{Q}^2$ 的可数性.

19. 考虑圆周 $S_\rho = \{z \in \mathbf{C}: |z| = \rho\}$, $0 < \rho < \infty$.

20. 设 $A = \{a_n: n \in \mathbf{N}\}$, $A_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 则 A_n 仅有有限多个子集.

21. 作线段 $\overline{zw}$的中垂线 l, 设 $\zeta \in l$, 考虑连接 z, ζ, w 的折线.

22. 利用实数的二进位小数表示作一双射 $f: 2^{\mathbf{N}} \to [0,1)$.

23. 利用实数的小数表示作一双射 $f: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$.

25. 利用 $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \backslash \{x\}}$ 及 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

27. 若 A 非开集, 则有$\{x^{(k)}\} \subset A^c$, 使 $x^{(k)} \to x \in A$. 令 $B = \{x^{(k)}\}$, 则 $x \in A \cap \overline{B}$, $A \cap B = \varnothing$.

28. $A^\circ = \varnothing$, $\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1]) = A'$.

29. $\forall x\in A$，存在一个以有理点为中心、以有理数为半径的球 B_x，使得 $A\cap B_x=\{x\}$.

30. 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集，则 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x: d(x,F)<1/k\}$.

31. 注意 $A\subset(A\backslash A')\cap A'$ 并用题 29.

33. $A'=P$.

34. $\mathbf{R}^n(\overline{\lim_k} f_k<a)=\bigcup_{m,k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}\mathbf{R}^n\left(f_i\leqslant a-\dfrac{1}{m}\right)$.

35. 指出该集在 $[0,1]$ 中的余区间.

36. 等式两边与 A 作对称差运算.

37. 指明 $\overline{\lim_k} A_{n_k}\subset\overline{\lim_n} A_n$，$\underline{\lim_k} A_{n_k}\supset\underline{\lim_n} A_n$.

40. $\lim_n X(f_n\geqslant 1/2)=A$.

41. 否则有 $n_1<n_2<\cdots$，$x_k\in A\cap(A_{n_k}\backslash A_{n_{k-1}})$，令 $B=\{x_k\}$，则 $B\cap A_n$ 为有限集.

42. 取 $A=\bigcap\{B: f(B)\subset B\}$.

43. 任取 $x_0\in X$，令 $x_n=f(x_{n-1})$，$A=\{x_1,x_2,\cdots\}$.

44. 当 $|A|\geqslant\omega$ 时利用 $A\times\{0,1\}\sim A$.

45. 取 $a,b\in A$，$a\neq b$，则 $|(A\times\{a\})\cup(A\times\{b\})|\leqslant|A|$.

46. 利用 $\bigcup A_n\sim\mathbf{R}^{\mathbf{N}}=\{(x_1,x_2,\cdots): x_n\in\mathbf{R}(\forall n\in\mathbf{N})\}$ 并用反证法.

47. 确立 $C[0,1]\sim A\subset\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

48. 由 $f\to \mathrm{Gr}f$ 得 $|\mathbf{R}^{\mathbf{R}}|\leqslant 2^{|\mathbf{R}\times\mathbf{R}|}=2^c$.

49. 利用 1.5.1 及 $|\mathbf{R}^{\mathbf{N}}|=c$.

50. $|B|=2^{|X|}$.

51. 考虑 $B=2^{\cup A_n}$.

52. 利用分解 $X(f\neq 0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}X(|f|>1/n)$.

53. $\forall x\in\mathbf{R}$，取有理端点的开区间 J_x，使 $x\in J_x$ 且 $f(y)\geqslant f(x)(\forall y\in J_x)$，注意 $f(x)\neq f(y)\Rightarrow J_x\neq J_y$.

54. 利用题 68 或直接证之.

55. 否则 $\mathbf{R}^n\subset A-A$，而 $A-A$ 可数！

56. 观察 $E=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 这一特殊情形.

57. $|A|=\omega$.

58. 如取 $G=\{x: d(x,A)<d(x,B)\}$，$H=\{x: d(x,A)>d(x,B)\}$.

59. 否则 $\mathbf{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$，$F_k$ 是闭疏集，然后推出矛盾.

60. f 在 x 连续 $\Leftrightarrow \omega(x) \triangleq \overline{\lim_{y \to x}} f(y) - \underline{\lim_{y \to x}} f(y) = 0$. 令 $A_n = \{x: \omega(x) \geqslant 1/n\}$. 若 $[0,1] \backslash \mathbf{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，将引出矛盾.

61. 指明 $(0,2) \subset \overline{P+P}$.

62. $\{x: \omega(x) \geqslant 1/n\}$ 是闭集(见题 60).

63. 利用题 34.

65. 指明 $\mathbf{R}(f' \leqslant a)$ 为闭集，$a \in \mathbf{R}$.

66,67. 用 1.6.2.

68. 利用有理中心与有理半径的球.

69,70. 用 1.6.5.

第二章

1. 参照 Cantor 集的构作并利用 $1/2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot 4^{-n}$.

2. 令 F^c 是一族覆盖 $\mathbf{Q}$ 的开区间之并.

3. 取开集 $G \supset A$，使 $mG - mA < \varepsilon/2$，然后考虑 G 的构成区间.

4. 注意 $(a-\delta, a+\delta) \subset A \cup (2a - A)$.

5. 取闭集 $F_n \subset A$ 与开集 $G_n \supset A$，使 $m(G_n \backslash F_n) < 1/n (n = 1,2,\cdots)$.

6. 只需证 $G \subset \overline{G \backslash A}$.

7. 注意 $f(r) = m(A \cap B_r(0))$ 连续并用介值定理.

8. 利用平移不变性.

9. 利用 Cantor 集有基数 $\mathfrak{c}$.

10. 用 2.2.3(iv)(v).

11. 用上题.

12. $\mu(\overline{\lim_{n}} A_n) \leqslant \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k$.

13. 注意 $A_n^c (n = 1,2,\cdots)$ 是零测集.

14. 取 $n_1 < n_2 \cdots < n_i < \cdots$，使 $\sum_i (1 - \mu A_{n_i}) < 1$.

15. 注意 $1 - \mu(\bigcap A_i) \leqslant \sum_i \mu A_i^c$.

17. 分别对 $a \geqslant 0$ 与 $a < 0$ 考虑 $X(f > a)$.

18. 令 $h(x) = g(f(x))$，则 $X(h > a) = f^{-1}(g^{-1}(a,\infty))$.

19. 参照§2.3 例 3.

20. $f'(x)=\lim\limits_{n} n[f(x+n^{-1}-f(x)]\ (a\leqslant x<b)$.

21. 分解集$\{x: f(x)>a\}$.

22. 指明 $\varphi(x)=\sup\{f(x,r): r\in\mathbf{Q}\cap[0,1]\}$.

23. 注意 $X(\varphi\leqslant a)=\bigcap_{f\in F}X(f\leqslant a)$并用 1.5.6.

24. 注意 $\varphi(t)$单调增并用 2.2.3.

25,26. 参考 2.3.6 之证.

27. 可取 $f_n=f\chi_{X(|f|\leqslant n)}$.

28. 分解集 A 并注意用 Cauchy 收敛条件.

29. 取 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}X(|f_n|\leqslant k)$,$k$ 适当大.

31. 取子列$\{f_{n_k}\}$:$f_{n_k}\to f$,a.e..

32～33. 参照§2.4 例 5.

35. 用 2.4.2.

36. 可设 $f_n\geqslant 0$,$g_n=\sup\limits_{k\geqslant n}f_k$,注意 $g_{n_k}\to 0\Rightarrow g_n\to 0$.

37. 用 Egorov 定理.

38. 取 $k_1<k_2<\cdots$,使 $\mu X(|f_n|>k_n)<2^{-n}$,令 $a_n=k_n^{-2}$.

39. 取闭集 $F_k\subset X$,使 $m(X\setminus F_k)<2^{-k}$,$f|F_k$ 连续($k=1,2,\cdots$),指明 $f_k\to f$,a.e..

40. $\forall k\in\mathbf{N}$,取 $g_k\in C(\mathbf{R}^n)$,使 $mX(f\neq g_k)<1/k$.

41,42. 参考[5,p.46,p.59].

43. 指明 $m(G\setminus F)=0\to F=\mathbf{R}$.

44. 可设 A 有界.若结论不真,则 $\forall r,s\in\mathbf{Q},r\neq s$ 时,$A_r\cap A_s=\varnothing$,$A_r=A-r$.

45. 否则 $A-A\subset\mathbf{Q}$,从而 A 可数.

46. 可设 $mA<\infty$,取开集 $G\supset A$,使 $mG<p^{-1}mA$,取 G 的某个构成区间作为 Δ.

47. 利用上题.

48. 反证并用上题.

49. 如令 $E=(A\times C)\cup(D\times B)$,$A,B$ 不可测,C,D 是适当的可数集.

50. 用第一章 68 题.

51. 设 F 如题 1,作严格增函数 $f:[0,1]\to[0,1]$,使 $f(F)=P$(Cantor

集);取不可测集 $A \subset F$,令 $B = f(A)$.

52. 设 f、A,B 如上题,则 $\chi_A = \chi_B \circ f$ 不可测.

53. 用第三章 65 题.

54. 设 F 如题 1,取 $f = \chi_F$.

55. 利用可测性平移不变.

56. 参照 Egorov 定理之证.

57. 充分性:取 $n_1 < n_2 < \cdots$,使 $\mu X(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geqslant 2^{-k}) < 2^{-k}$,验证 $f_{n_k} \to f$,a.e.,然后推出 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

58. 令 $A_{nk} = X(|f_n| < 1/k)$,取 $k_1 < k_2 < \cdots$,使 $\mu A_{nk_n}^c < 2^{-n}$;取 $n_1 < n_2 < \cdots$,使 $k_{n_i} > 2^i$;当 $n \neq n_1, n_2, \cdots$ 时令 $a_n = 0$,否则令 $a_n = 1$.

59. 用 μ^* 的次可加性.

60. 注意 $A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.

61. 利用 § 2.5(2).

62. 在 § 2.5(3)中取 $A = \bigcup A_i$.

64. 取开集 $G_n \supset A$,使 $mG_n \to m^* A$,令 $B = \bigcap G_n$.

65. 取 $B_n \supset A_n$,使 $mB_n = m^* A_n$;令 $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} B_k$,则

$$m^*(\bigcup A_n) \leqslant \lim_n mC_n = \lim_n m^* A_n.$$

66. 参考 2.5.7 之证.

67. 指明 $\varphi(x) = m^*(A \cap (-x, x))$ 连续.

69. 取 $B = A \cap (-A)$.

70. 可设 A 有界,有区间 $J \supset A$,使 $mJ < 2mA$(参考题 46);取 $\varepsilon = 2mA - mJ$.

第三章

2. $\int_X f \mathrm{d}\mu = f(a)$.

4. 注意 $0 \leqslant \varphi - f \leqslant g - f$,$\varphi = \varphi - f + f$.

5. $\int_{X(f > g)} (f - g) \mathrm{d}\mu = 0 \Rightarrow \mu X(f > g) = 0$(3.2.5).

6. 指明 $\int_{X(f < 0)} f \mathrm{d}\mu = 0$.

8. 取 $g = \operatorname{sgn} f$;或取 $g = \chi_A$ 并用题 5.

9.　$X(f\neq 0)=\bigcup A_n$，$\{A_n\}$是升列且 $\mu A_n<\infty$.

10.　令 $e_k=X(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$，则 $(y_k-\delta)\mu e_k\leqslant\int_{e_k}f\mathrm{d}\mu\leqslant y_k\mu e_k$.

11.　$\sum\mu A_i=\int_X\sum\chi_{A_i}\mathrm{d}\mu\geqslant q\mu X$.

12.　$\int_0^1 f\mathrm{d}m=3$.

14.　反证之.

15.　$X(f\neq 0)$必可数(3.2.3(ii)).

16.　对 f_n-g 或 $g-f_n$ 用 Levi 定理.

17.　用 $\sum\chi_{A_n}\in L^1$ 及 3.2.3(ii).

18.　注意 $\int_X\sum\chi_{A_n}\mathrm{d}\mu\geqslant k\mu B$，参照题 11.

19.　$\sum_{n=1}^{\infty}(n+p)^{-2}$.

20.　对 f_n-g 或 $g-f_n$ 用 Fatou 定理，参照题 16.

21.　用 2.4.2(iii)及 Fatou 定理.

22.　用 Fatou 定理.

23.　对 $F_n=\sum_{i=1}^n f_i$ 用控制收敛定理.

24.　$\sum\int_0^{\infty}f_n\mathrm{d}m=0$，$\int_0^{\infty}\sum f_n\mathrm{d}m=\frac{b}{a}$；$x_n=\frac{\ln(b/a)}{n(b-a)}$，$\int_0^{\infty}|f_n|\mathrm{d}m=\int_0^{x_n}(-f_n)\mathrm{d}m+\int_{x_n}^{\infty}f_n\mathrm{d}m=\frac{2}{n}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{a/(b-a)}-\left(\frac{a}{b}\right)^{b/(b-a)}\right]$.

25～30.　用控制收敛定理. 25～27，29 极限为零；28，30 分别为 $\sqrt{\pi}/2$ 与 1.

31.　展开被积函数并用题 23.

32.　指明 $\mu X(f>1)=\mu X(0<f<1)=0$.

33.　用 3.3.6(ii).

34.　$I'(\alpha)=-1/(\alpha^2+1)$，$I(\alpha)=\arctan(1/\alpha)$.

35.　$I'(\alpha)=-\alpha I(\alpha)/2$，$I(\alpha)=\sqrt{\pi}\exp(-\alpha^2/4)$.

36.　注意 $\left|\int_{A_n}f_n\mathrm{d}\mu-\int_A f\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_X|f_n-f|\mathrm{d}\mu+\int_{A\Delta A_n}|f|\mathrm{d}\mu$.

37.　指明 $f=g$，a.e..

38.　指明 D 可数(参看第一章题 31).

39.　指明 f 有界且几乎处处连续.

40. $\alpha < 1, f \in L^1[0,1]$; $1 \leqslant \alpha < \beta + 1$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛；$\alpha \geqslant \beta + 1$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

41. 首先指明 $\int_{X\times Y} |f(x)g(y)|\mathrm{d}(\mu \times \nu) < \infty$.

42. 仿 41 题.

43. 用 Fubini 定理，$\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$.

44. 注意 $\int_0^a g\mathrm{d}m = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \chi_{[x,a]}(t)\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$，用 Fubini 定理.

45～47. 用 Fubini 定理交换积分次序.

48. 指出 $\forall\ x_0 \in (0,1)$; $f(x_0, y) = 1$, a.e.，故积分为 1.

49. $\sum\limits_m \sum\limits_n f(m,n) = 1$, $\sum\limits_m \sum\limits_n f(m,n) = 0$.

50. 指明 $\int_0^1 m(E_x)\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \int_0^1 m(E^y)\mathrm{d}x$.

51. 设 $A_n = X(|f| \geqslant n)$，则

$$\sum\nolimits_{k=1}^n \mu A_k - \int_X |f|\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{X(|f| \leqslant n+1)} |f|\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant \sum\nolimits_{k=1}^n \mu A_k + \mu X.$$

条件“$\mu X < \infty$”只用于证充分性. 当 $\mu = \infty$ 时充分性不成立：考虑 $f(x) = 1/2$, $X = [0,\infty)$.

52. 设 $A_n = X(2^{n-1} \leqslant |f| < 2^n)$，则 $2^{n-1}\mu A_n \leqslant \int_{A_n} |f|\mathrm{d}\mu \leqslant 2^n \mu A_n$.

53. $\sum \mu X(|f| \geqslant n) \leqslant K\sum n^{-\alpha}$，用题 51.

54. 用题 51.

55. 否则有 $A_n \subset X$; $\mu A_n \geqslant q$, $\int_{A_n} f\mathrm{d}\mu < 2^{-n}$. 令 $A = \overline{\lim\limits_n} A_n$，则 $\mu A \geqslant q$, $\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$!

56. 指明 $\int_{\mathbf{R}} \sum\limits_n |n^{-2} f(nx)|\mathrm{d}x < \infty$.

57. 取 $x_n \downarrow 0$，使 $\int_0^{x_n} |f|\mathrm{d}m < 2^{-n}$；令 $g|(x_n, x_{n-1}] = n\ (n = 1, 2, \cdots)$.

58. 指明 $f_n \leqslant f_{n+1}$, a.e..

59. 设 $F^c = \bigcup(a_k, b_k)$，指明 $\mu X(a_k < f < b_k) = 0$.

60. 用 Fatou 定理指明 $\int_A f\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_n \int_A f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \varlimsup_n \int_A f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A f\mathrm{d}\mu$.

61. 对 $g_n + g - |f_n - f|$ 用 Fatou 定理(参照 3.3.4 之证).

62. 用上题或直接证之.

63. 指明 2.4.2(i)之证可用.

64. 可用反证法并用 2.4.2.

65. 注意 $\int_{\mathbf{R}} g\mathrm{d}m = \sum 2^{-n}\int_{\mathbf{R}} f\mathrm{d}m = 2$.

66. 指明 f 几乎处处连续.

68. 注意 $\varphi(y) = \int_{X(f>y)} \mathrm{d}\mu$ 并用 Fubini 定理.

69, 70. 类似于上题.

第四章

1. 用 Hölder 不等式,注意 $fg = fg^{1/p} \cdot g^{1-1/p}$.

2. 令 $s^{-1} = p^{-1} + q^{-1} = 1 - r^{-1}$,两次用 Hölder 不等式.

3. 指明 $\|f\|_\infty \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \varlimsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$.

4. 用 Hölder 不等式,注意 $\|f\|_1 = \|\sqrt{f}\|_2^2$.

5. 用三角不等式,注意 $f = f\chi_A + f\chi_{A^c}$.

6. 用 Hölder 不等式,注意 $\left(\frac{r}{\lambda p}\right)^{-1} + \left(\frac{s}{(1-\lambda)p}\right)^{-1} = 1$.

7. $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \mu X + \int_{X(|f|>1)} |f|^r \mathrm{d}\mu$.

8. 无必然的包含关系.

9. 用 Hölder 不等式,$\int_x^{x+h} |f|\mathrm{d}m \leqslant \|f\|_p |h|^{1-1/p}$.

11. 用 4.1.7.

12. $\forall\, n \in \mathbf{N}, \exists\, A_n$: $\mu A_n = 0$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{A_n^c} |f_n(x) - f(x)|$.

13. 用三角不等式与 Hölder 不等式.

14. 参照第三章题 60.

15. 用 Hölder 不等式:$\left|\int_a^x (f_n - f)\mathrm{d}m\right| \leqslant \|f_n - f\|_p (b-a)^{1-1/p}$.

16. 用 4.1.6.

17. 用 Hölder 不等式：$\int_X |f_n - f|^p d\mu \leqslant \|f_n - f\|_r^p (\mu X)^{1-p/r}$.

18、19. 参照 4.2.5 之证.

20. 对 $f = \chi_A$ 用 4.2.5.

21. 首先考虑 $f = \chi_{(\alpha,\beta)}$，$(\alpha,\beta) \subset [a,b]$.

23. 用 Schwarz 不等式.

24. 估计 $\|\sin x - \cos x\|_2$ 并用三角不等式.

25. 对(f,χ_A)用 4.3.3(v).

27. 可设 $f = 0$，首先考虑 $\mu X < \infty$ 的情况.

28. 考虑 $f_n(x) = \sin nx$，$X = [0,1]$.

29. $30(7e-19)x^2 + 12(49-18e)x + 39e - 105 \approx 0.8392x^2 + 0.8511x + 1.0130$.

30. $\|f\|_2^2 = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right]$，$a_n,b_n$ 是 f 的 Fourier 系数.

31. 参照第三章题 51.

32. 用 Hölder 不等式：$\|f\|_n^n \leqslant \|f\|_{n+1}^n (\mu X)^{1/(n+1)}$；其次 $\|f\|_{n+1}^{n+1} \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|f\|_n^n$.

33. $\varphi(\lambda) = \lambda^\beta \|f\|_p + (1-\lambda)^\beta \|g\|_p$ 是凸函数.

34. 若 $f \overline{\in} L^\infty$，则可作 $g \in L^1$，使 $fg \overline{\in} L^1$.

35. 参照第三章题 61，62.

36. 参照题 27.

38、39. 首先对 $f = \chi_{(\alpha,\beta)}((\alpha,\beta) \subset [a,b])$证之.

40. 首先设 $f|[0,T) = \chi_{(\alpha,\beta)}$，$(\alpha,\beta) \subset (0,T)$.

41. 首先考虑 $f = \chi_A$，$A \subset \mathbb{R}^n$ 有界可测.

42. 可设$\forall f \in F$：$\|f\|_2 = 1$；$f,g \in F$，$f \neq g \Rightarrow \|f-g\|_2 = \sqrt{2}$.

43. 指明 $\mu X(|f| > \beta) = 0$.

44. 首先指明当 $mA > 0$ 时 $\sum \int_A \varphi_i^2 dm \geqslant 1$.

45. 对$\{\psi_n\}$验证 4.3.3 中条件(ii).

46. 对$\{\psi_n\}$验证 4.3.3 中条件(iii).

47. 指明 $\sum_{\varphi \in \Phi} |(f,\varphi)|^2 < \infty$，故$\{\varphi \in \Phi : (f,\varphi) \neq 0\}$可数，设为$\{\varphi_n\}$，则 $f = \sum (f,\varphi_n)\varphi_n$.

48. 用反演公式及 Fubini 定理.

49. 用反演公式.

50. 用反演公式及 Fubini 定理.

第五章

1. 验证 $f(x^{\pm}) = g(x^{\pm})$；$\overline{\lim\limits_{y\to x}} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = \overline{\lim\limits_{y\to x}} \dfrac{g(y)-g(x)}{y-x}$（$x$ 是 f 的连续点）；关于下极限仿此.

2. 参照 5.1.4 之证.

3. 参照 §5.1 例 1.

4. $\sum |\Delta f(x_i)| \leqslant |\Delta f(x_1)| + \text{const}$.

5. $\sum |\Delta f(x_i)| \leqslant V_a^b(f_n) \leqslant K = \text{const} \Rightarrow \sum |\Delta f(x_i)| \leqslant K$.

6. 参照 §5.2 例 1.

7. 令 $\pi(x) = V_a^x(f)$，不妨只证 $f(a^+) = f(a) \Rightarrow \pi(a^+) = 0$.

8. 指明 $|f'| \leqslant \pi'$.

10. $g(x) = |x|^p$ 在有限区间上为 Lipshitz 函数.

12,14. 用 5.3.5.

13. 用 5.3.4.

15. 当 $\alpha > \beta$ 时 $f \in \mathrm{AC}$；当 $\alpha \leqslant \beta$ 时 $f \overline{\in} \mathrm{BV}$.

16. 用 5.2.5 及第三章题 23.

17. 用 5.3.5 及控制收敛定理.

18. 用 5.3.5.

19. 用 5.3.5 与 5.1.4.

20. $g(x) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

21. 用题 19 与 42.

22. 参照 5.4.2 之证.

23. 将 §5.4(2)用于 $0, 1, x$ 三点.

24. 若 $f \in \mathrm{AC}$ 且 f' 单调增，则可用 5.3.5 推出 §5.4 (2).

25. 取 $[a,b]$ 的分划 $\{x_i\}$ 使 $c \in (x_{k-1}, x_k)$.

27. $V_a^b(F) \leqslant \|f\|_\infty V_a^b(g)$.

28. 用 5.5.4 及 §5.5(4).

29. 用 §5.5(8) 估计 $\left|\int_a^b (f_n - f)\mathrm{d}g\right|$.

30. 估计 $\left|\int_a^b f\mathrm{d}g_n - \sum f(x_i)\Delta g(x_i)\right|$.

31. 参照第二章题 11.

33. 用 Hahn 分解.

35. 首先考虑简单函数，然后用 Levi 定理.

36. 只需对 $G = (\alpha,\beta)$ 证，φ 在 α,β 连续.

37. 注意 $\mu_\phi = \mu_\varphi + \mu_{\phi-\varphi}$.

38. 证 φ 连续且 $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

41. 建立从单调函数集到 $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 的单射(参照第一章题 47).

42. $g \triangleq \sum f_n < \infty$, a.e.；令 $F_n = \sum_{i=1}^n f_i$，设 $\sum[f(b) - F_{n_j}(b)] < \infty$，则 $F'_{n_j} \to f'$, a.e.

43. 对 $s = \sum_\xi [f(\xi^+) - f(\xi^-)]\chi_{[\xi,\infty)}$ 用上题.

44. 指明 $\{x : |f(x^+) - f(x^-)| \geqslant 1/n\}(n \in \mathbf{N})$ 皆可数.

45. 参考[14, p.282].

46. 令 $g = |f|$. 若 $f(x_{i-1})f(x_i) < 0$，则$\exists\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$：$f(\xi) = 0$，于是 $|\Delta f(x_i)| \leqslant |g(x_{i-1}) - g(\xi)| + |g(\xi) - g(x_i)|$.

47. 参考 [7, p.252].

48. 参考题 51.

49. 如取 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^3\cos^3(\pi/x)(0 < x \leqslant 1)$, $g(0) = 0$.

50. 显然 $V_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'|\mathrm{d}m$. 取阶梯函数 $\varphi_n \to \operatorname{sgn} f'(L^1)$，使 $|\varphi_n| \leqslant 1$, $\varphi_n \to \operatorname{sgn} f'$, a.e.，则可得 $\int_a^b |f'|\mathrm{d}m \leqslant V_a^b(f)$.

51. 用题 19, 50.

53. $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|(\forall\ x, y \in [a,b]) \Rightarrow \|g\|_\infty = \|f'\|_\infty \leqslant L$.

54. 关键是充分性. 可用有限覆盖定理.

55. 令 $f(x) = \int_0^x \chi_A \mathrm{d}m$，则有 $x_0 \in A$ 使 $f'(x_0) = 1$.

56. 指明 f' 单调增.

57. 任给 $x\in(a,b)$，不妨设 $x>x_0$；令 $x_t=(1-t)x_0+tx(0<t<1)$，则 $\dfrac{f(x_t)-f(x_0)}{x_t-x_0}\leqslant\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

58. $\forall\, x\in G$，可取出 $x_i\in G(0\leqslant i\leqslant n)$，使 x 在以 x_i 为顶点的多面体的内部. 设 $x=\sum t_i x_i, t_i>0, \sum t_i=1$，则 $f(x)\leqslant\sum t_i f(x_i)$，可见 f 局部地有上界. 由此可推出 f 连续.

59. 用 RS 积分之定义.

60. 利用 Hahn 分解.

名词索引

名词后的数字表示该名词首次出现的页码.